Il metodo MONTE CARLO

Approccio sperimentale al concetto di probabilità e al calcolo delle aree

F9

Una storia scritta con l'aiuto di Excel che racconta di marinai ubriachi, monete, palline, fiammiferi e altro ancora, dove il protagonista è il tasto di ricalcolo : F9, appunto...

CURATORI DEL LAVORO

Ornella Severin
docente di Matematica presso il Liceo Scientifico "P. Levi" Montebelluna TV

Ennio Poletti
docente di Matematica/Fisica presso il Liceo Scientifico "P. Levi" Montebelluna TV

A. S. 2005 /2006

SCHEDA

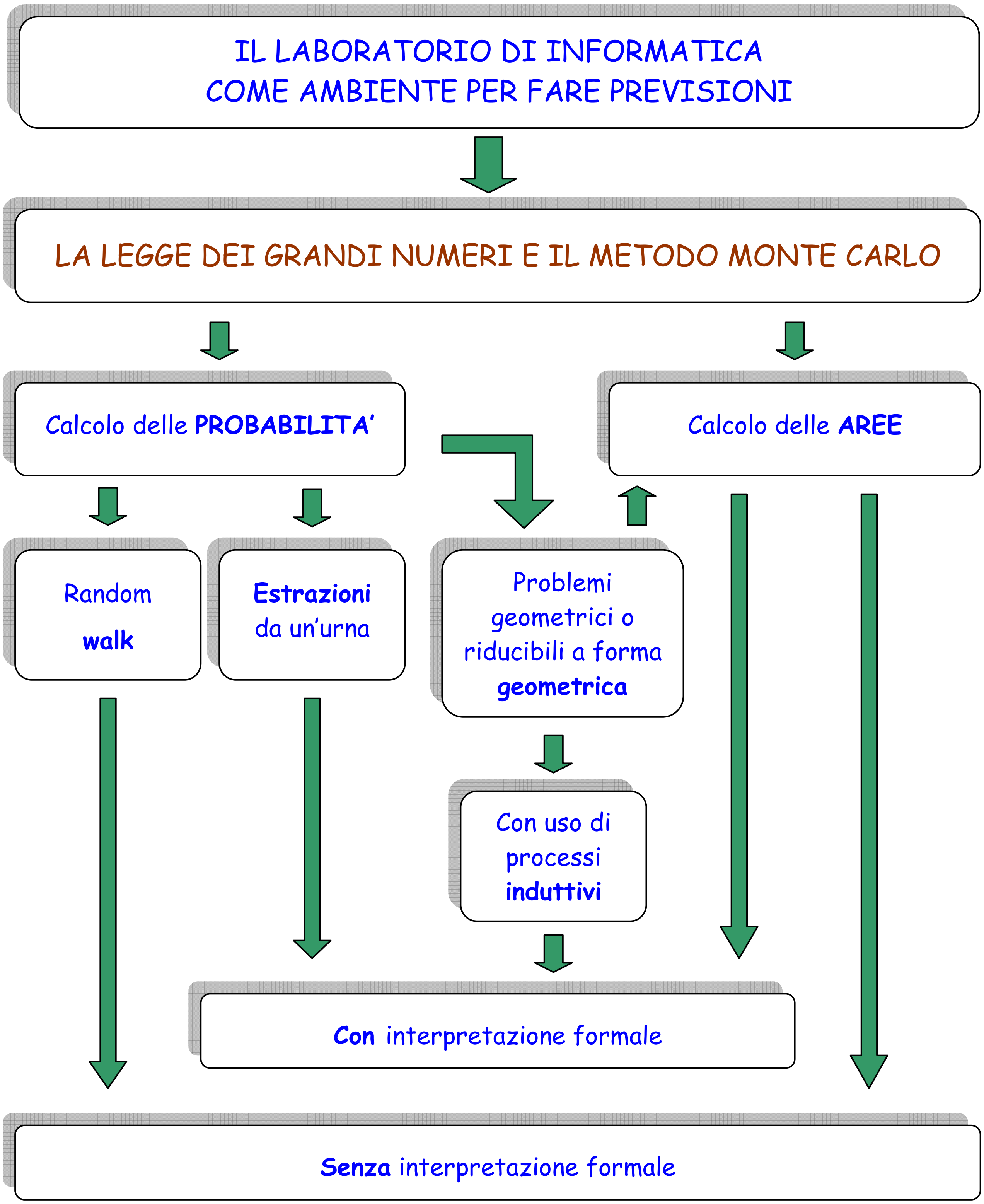
IL METODO MONTE CARLO: APPROCCIO SPERIMENTALE AL CONCETTO DI PROBABILITA' E AL CALCOLO DELLE AREE

Prof.ssa Ornella Severin, docente di Matematica (ornellase@yahoo.it),
Prof. Ennio Poletti , docente di Matematica/Fisica (enniopoletti@yahoo.it),
Liceo Scientifico P. Levi Montebelluna TV

Target	Il percorso è indirizzato al triennio della scuola secondaria superiore.
Mappa concettuale	Vedi mappa a parte
Modelli formali (Leggi o Macro concetti)	Concetti chiave (microconcetti)
PROBABILITA'	• *Definizione a "priori"* • *Probabilità composta* • *Eventi dipendenti* • *Eventi indipendenti* • *Eventi complementari* • *Dal discreto al continuo* • *Integrale definito* • *Principio di Induzione*
FREQUENZA RELATIVA	• *Definizione "sperimentale"* • *Irreversibilità* • *Variabili aleatorie* • *Spazio campionario*
LEGGE DEI GRANDI NUMERI	• *Limite matematico, anche non formale* • *Probabilità teorica (che prima era un modello formale)* • *Frequenza relativa (che prima era un modello formale)* • *Metodo Monte Carlo*
OBIETTIVI	*CONOSCENZE:* *Al termine del percorso l'alunno conosce:* • *Uso della funzione "CASUALE()" di Excel* • *frequenza relativa e probabilità;* • *differenze tra macrostato e microstato;* • *evoluzione di un sistema;* • *irreversibilità di un processo;* • *differenza tra frequenza relativa e probabilità teorica* • *Metodo Monte Carlo* *COMPETENZE – ABILITA'* *Al termine del percorso l'alunno è in grado di:* - *calcolare la probabilità secondo la definizione classica;* - *calcolare la probabilità secondo la definizione frequentista* - *calcolare l'area sottesa da una curva col metodo Monte Carlo* - *costruire con il foglio elettronico modelli per situazioni regolate da eventi aleatori.*

Metodo di lavoro	*Il metodo di lavoro si basa sulle seguenti fasi operative:* - *Analisi del problema proposto come stimolo iniziale* - *Lavoro sperimentale (esperienze) e modellizzazione assistita da PC per la ricerca della soluzione.* - *Modellizzazione formale, ove possibile, del problema* - *Confronto fra la risposta del modello informatico e la soluzione formale del problema.* - *Generalizzazione del modello informatico*
Strumenti e materiali	*Per la modellizzazione al PC è necessario che gli alunni abbiano a disposizione il foglio elettronico.*
Tempo in classe	*Il percorso non deve necessariamente essere svolto per intero; le diverse proposte, infatti, sono indipendenti fra loro, per cui ognuno è libero di scegliere i problemi che ritiene più interessanti.* *Si tenga presente che ciascun problema richiede un tempo che va dalle due alle tre ore comprensive di analisi e implementazione.Questa previsione vale se gli alunni conoscono il F. E. Excel, Cabri e/o GeoGebra ed elementi base di programmazione.*
Tempi Insegnante (prima e dopo l'intervento in classe)	*Per l'analisi del percorso e la predisposizione di eventuali schede da proporre agli studenti sono necessarie alcune ore in funzione dell'abilità informatica di chi si cimenta coi problemi proposti.* *Se dopo il lavoro in classe vengono assegnate agli studenti relazioni da svolgere a casa o in classe, devono essere previste alcune ore per la correzione*
Modalità di verifica e valutazione	*Agli studenti può essere richiesta la stesura di una relazione organica che documenti il problema svolto in classe. La relazione dovrà contenere tabelle e grafici prodotti nel corso del lavoro e risposte alle eventuali domande che guidano l'evoluzione del percorso.*
Dove/da chi/ quando è stato sperimentato	*Parte del percorso è stata sperimentata dalla prof.ssa Ornella Severin nella classe IV D del Liceo Scientifico "P. Levi" di Montebelluna.*

MAPPA CONCETTUALE DEL LAVORO



INTRODUZIONE

Prima di iniziare la trattazione sperimentale del concetto di probabilità e del calcolo delle aree, proponiamo la lettura di un brano tratto da *L.Lomabardo Radice/ L. Mancini Proia, Il metodo matematico nel mondo moderno, ed. Principato, Milano 1988, p.189*, che ci sembra particolarmente adatto per creare il giusto sfondo storico e culturale rispetto al ramo della Matematica che ci apprestiamo ad approfondire. Lo riportiamo integralmente in corsivo e fra virgolette.

"……………………………………

I giocatori d'azzardo interpellano i matematici

Abituati come siete alla televisione, alla radio, al cinema, alla illuminazione stradale e alla rapidità dei trasporti, non so se vi siate mai chiesti: " Come passava il tempo la gente, la sera dopo il tramonto, nel Medio Evo e nel Rinascimento, e in fondo anche 100 anni fa, perché anche 100 anni fa tutte quelle cose non c'erano? " Ma lasciamo pure da parte l'ottocento, il secolo che precede il nostro. In fondo, 100-150 anni fa era abbastanza diffuso e popolare almeno il teatro (commedie, drammi in prosa e in musica - " i melodrammi ", o drammi cantati). Inoltre, case e città venivano via via sempre meglio illuminate con diversi tipi di lampioni, molto prima della luce elettrica; ci si muoveva di più, c'era più vita di relazione (lesto, visito, balli, serate con amici).

Tuttavia, anche 100 o 150 anni fa, e a maggior ragione nel Rinascimento o addirittura nel Medioevo, il grande passatempo di tutti, dal monarca al popolano, era il gioco d'azzardo. Giocare: a carte, ai dadi, alla morra, alla "zara"[1] ecco il grande svago dei tempi antichi. Giocare, e scommettere.

Scommettere su tutto Una donna aspetta un figlio, in un quartiere della Firenze de! `400, quella di Lorenzo il Magnifico? Ed ecco tutto il quartiere che scommette se nascerà maschio o femmina. Una specie di " totocalcio ", molto elementare Naturalmente qualcuno ci guadagnava sopra, raccogliendo le puntate, registrandole, e trattenendo poi per sé una percentuale sulle vincite. Nella commedia Il campiello di Carlo Goldoni (sono passati circa tre secoli, siamo verso la metà del `700) è la scena della lotteria tra te comari, organizzata da un affarista ambulante: l'estrazione a sorte dei premi viene fatta se ben ricordo, colle carte dei " tarocchi ".

Torniamo indietro nel tempo. A Genova, nel 1576, viene emanata una nuova Costituzione della Repubblica (allora indipendente, e fiorente);. Si stabiliva, tra l'altro, che ogni sei mesi cinque " ministri " lasciassero la loro carica, e venissero sostituiti da altrettanti " deputati" per estrazione a sorte. Dapprima si dovevano sorteggiare cinque nomi su centoventi, poi "cinque su novanta"; prima si mettevano nel bussolotto i nomi, poi numeri (un numero per ciascun candidato). I genovesi cominciano a scommettere: quale sarà la cinquina di nomi, o numeri, che salterà fuori dai novanta cartellini imbussolati? Questo gioco d'azzardo si chiamò all'inizio lotto genovese: poi, diffondendosi, si chiamò lotto senz'altro: esiste ancora oggi, e nessuno (o quasi nessuno) sa la curiosa storia delle sue lontane origini. Dunque: gioco e scommesse. Anche nel popolo.

Ma, naturalmente, nelle Corti e nei palazzi dell'aristocrazia, tra la gente potente, ricca e oziosa, il gioco d'azzardo diventa una mania, una fissazione, quasi lo scopo della vita almeno per certuni. Tra i giocatori d'azzardo vi sono anche gentiluomini colti e dotati di spirito ai osservazione: si chiedono su quale risultato convenga puntare; nel gioco dei dadi[2], di grande moda nel Cinquecento e nel Seicento, hanno cura di registrare tutte le uscite o risultati di una e più serate di gioco (le scoperte dei dadi si diceva al1ora (in modo espressivo) calcolando così la frequenza delle varie " uscite " Qualcuno dei più intelligenti si chiede "perché" non riesce a trovare una risposta soddisfacente e interpella allora qualche matematico famoso: Blaise Pascal se si tratta di un cavaliere francese, Galileo Galilei nel caso di gentiluomini fiorentini. Alcuni gentiluomini fiorentini, appassionati del gioco con tre dadi, chiedono a Galileo (attorno a 1630): "La lunga osservazione ha fatto da i giocatori stimarsi più vantaggioso 'l 10 e 'l 11 che 'l 9 e 'l 12 […] ancor che 'l 9 e 'l 12 in altrettante maniere si componghino in quante 'l 10 e 'l 11; perche? " Daremo tra un momento, la risposta esauriente data per iscritto da Galilei[3].

La risposta e chiarissima; la potreste leggere tranquillamente da soli, incontrando solo difficoltà... linguistiche ma non difficoltà matematiche. Prima però, vogliamo dare qualche breve notizia sulle Domande poste dal Cavaliere De Meré a Blaise Pascal e a Pierre Fermat, (i massimi luminari in quel momento, dopo la morte dì Descartes, della matematica francese), nel 1654 Alcune domande del Cavaliere sono molto arzigogolate, da vero fanatico dei dadi. C'è, o no, egli chiede, la stessa probabilità di vincere scommettendo che esca almeno un 6 su 4 tiri consecutivi, lanciando un dado alla volta, oppure scommettendo che escano almeno due 6 su 24 tiri, lanciando due dadi alla volta ? Secondo il contorto modo di ragionare del Cavaliere De Meré, la risposta avrebbe dovuto essere si". La risposta giusta e invece no , e Pascal la diede calcolando quanti sono i casi favorevoli allo scommettitore rispetto a tutti i casi possibili.

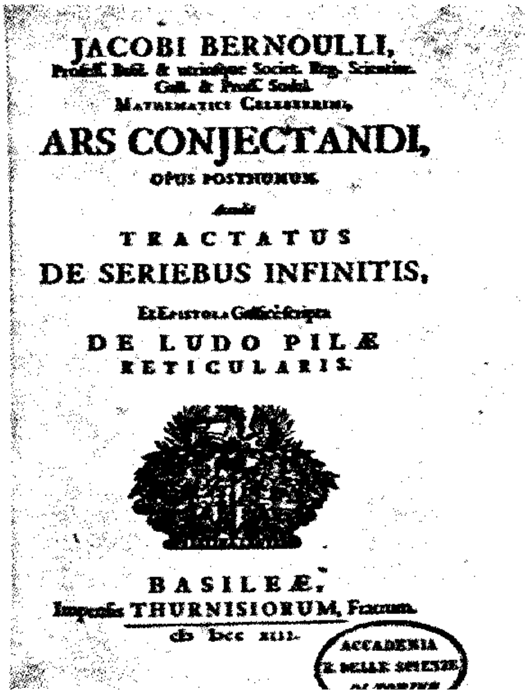
Non c'è difficoltà nel calcolare tutti i casi possibili soprattutto quando si fanno più tiri con un solo dado. Infatti, facendo un tiro, i casi possibili sono sei; facendo due tiri consecutivi a ognuna delle sei possibilità del primo tiro si accoppia ad arbitrio (a caso) ciascuna delle sei possibilità del secondo tiro, e $6 ´ 6 = 6^2 = 36$.

In una sere di 3 tiri consecutivi, i casi possibili si moltiplicano ancora per sei, e diventano $6^3 = 216$ *…; se si fanno n tiri consecutivi diventano* 6^n*. Un poco più faticoso invece calcolare i casi favorevoli e noi lasciamo il compito a Blaise Pascal, che lo ha del resto portato a term1ne già più di tre secoli fa.*

Pascal però, non rispose in modo del tutto soddisfacente ad un altro quesito del Cavaliere, che gli chiedeva quale doveva essere la " cifra equa " da pagare a un giocatore per subentrare a lui in una data puntata. Lo fece tre anni dopo, nel 1657, un grandissimo fisico matematico olandese, Christian Huyghens, introducendo il concetto di speranza matemaica. Come vedi, ci sono molti ritratti illustri nella galleria degli antenati seicenteschi del moderno calcolo delle probabilità!

Anche Galileo si occupò dei problema, e spiegò ai curiosi gentiluomini fiorentini come mai sia più "vantaggioso" il 10 del 9 nel lancio di tre dadi. La matematica conferma l'esperienza; c'è una corrispondenza tra probabilità e frequenza. Galileo, come del resto anche Pascal, fa il calcolo dei casi favorevoli a un avvenimento, o "evento" (l'evento, nel caso concreto, è un tiro di 3 dadi che dà come risultato 10, oppure...), rispetto a tutti gli eventi possibili (che, nel caso esaminato or ora, sono $216 = 6^3$ *numero totale del diversi tiri con 3 dadi). Galilei e Pascal fanno quindi un calcolo puramente matematico. Calcolano il rapporto v/t tra i casi "vantaggiosi" e "tutti i casi", calcolano cioè quella che si chiama la probabilità classica, o anche probabilità a priori*[4] *dell'evento. Sono convintissimi che il numero da loro trovato è, almeno approssimativamente, anche la frequenza dell'evento, cioè il rapporto, calcolato sperimentalmente dai giocatori, tra il numero dei casi vantaggiosi presentatisi e quello dl tutti i casi effettivamente accaduti in una serie molto lunga di giocate (su pochi tiri, è intuitivo che, "per caso", potrà presentarsi più spesso come risultato 9 anziché 10; più spesso di un caso, un altro caso meno probabile di quello). Questa convinzione, così radicata in ciascuno di noi, così naturale che un Galilei e un Pascal la adoperavano senza sentire il bisogno di giustificarla, è invece, a pensarci bene, uno dei principi più profondi e misteriosi che reggono lo svolgersi degli avvenimenti nell'universo grande e terribile. Parliamo della legge empirica*[5] *del caso, che ognuno di noi - lo ripetiamo - ha ben radicata in testa in forma intuitiva: quando mai accetteresti di scommettere che su 100 lanci di una monetina verrà 97 volte " testa " e solo tre volte "croce"? La probabilità classica (matematica, a priori) che venga "testa" è uguale a quella che venga "croce"; la frequenza "a posteriori" tende a coincidere, al limite, colla probabilità "a priori": l'esperienza finisce col confermare le previsioni della ragione.*

La legge empirica del caso è facile da intuire, difficile da formulare. Tu non accetteresti neppure di scommettere che su 100 tiri uscirà esattamente 50 volte " testa " e 50 volte " croce", mentre tutti siamo disposti a scommettere (e forte anche) che su 100 tiri verrà fuori " testa" tra le 40 e le 60 volte. Cosa vogliono però dire esattamente le espressioni: "alla lunga","più o meno", "al limite", "tende a..." che abbiamo sopra adoperato nell'enunciare la legge?



JACOBI BERNOULLI,
Profess. Basil. & utriusque Societ. Reg. Scientiar. Gall. & Prussic. Sodal.
Mathematici Celeberrimi,
ARS CONJECTANDI,
OPUS POSTHUMUM.
Accedit
TRACTATUS
DE SERIEBUS INFINITIS,
Et Epistola Gallicè scripta
DE LUDO PILÆ
RETICULARIS.
BASILEÆ,
Impensis THURNISIORUM, Fratrum.
cIↄ Iↄcc xiii.

Dovranno passare decenni, anzi assai più di un secolo, perché dalla fiducia ingenua di Galilei e di Pascal nella coincidenza (al limite) tra frequenza e probabilità, si giunga a formulazioni non approssimative, non intuitive della legge empirica del caso. Ne riparleremo nel corso dei nostri studi.
Ci limitiamo qui ad anticipare qualche notizia. Il calcolo delle probabilità diventa un vero e proprio ramo nuovo della ricerca matematica con un opera dello svizzero Giacomo Bernoulli (1654-1705), pubblicata a Basilea dopo la morte del suo autore, nel 1713, e intitolata Ars conjectandi (l'arte del congetturare). La prima sistemazione matura, rigorosa, moderna della nuova scienza sarà compiuta un secolo dopo, nel 1812, con un monumentale trattato sulla Théorie anaytique des probabilités, dal francese Pierre Simon de Laplace (1749-1827).

NOTE:

1.

Già Dante ne parla, dice precisamente:

Quando si parte il gioco della zara
colui che perde se ne va dolente
ripetendo le volle, e tristo impara.

" Divina Commedia, Purgatorio, Canto VI ".

2. " Dado " in latino si dice " alea ". L'origine storica del calcolo delle probabilità da problemi posti da giocatori ci dadi ha lasciato la sua traccia nell'aggettivo " aleatorio " molto usato in matematica come sinonimo di casuale.

3. Vedi sotto il titolo "Sopra le scoperte dei dadi", VIII volume della Edizione Nazionale da pag. 591 a pag. 595.

4. " A priori " è un'espressione latina che significa " in precedenza ", " prima di fare ". Opposto significato ha l'espressione " a posteriori " = " a cose fatte".

5. " Empiria " in greco vuoi dire " esperienza", perciò " empirico " è sinonimo di " sperimentale ".

"……………………………………

CONCEZIONI DI PROBABILITA'

Come già accennato nell'articolo precedente, vi sono più modi di intendere il concetto di probabilità. I matematici attualmente ricorrono a **quattro concezioni**:

1. **CLASSICA**
   Secondo questa definizione *la probabilità del verificarsi di un evento è data dal rapporto fra il numero dei casi favorevoli all'evento e il numero dei casi possibili.*
   In questa definizione gli esiti debbono essere tutti ugualmente possibili.
   Questa idea può essere estesa dall'ambito del discreto a quello del continuo. Per esempio la probabilità che una goccia di pioggia cada in una certa area piana che fa parte di una zona più ampia, è data dal rapporto tra l'area "favorevole", cioè quella del bersaglio, e l'area totale, cioè quella di tutta la zona considerata.

2. **FREQUENTISTA**
   Questa idea di probabilità è dovuta R.Von Mises, e conduce a una definizione sperimentale (empirica) di probabilità :
   la probabilità di un evento è il limite cui tende la frequenza relativa del suo verificarsi all'aumentare del numero di esperimenti
   La probabilità empirica si può applicare soltanto agli esperimenti ripetibili nelle stesse condizioni per un numero di volte relativamente elevato, sufficiente a stabilizzare la frequenza relativa. Ciò non sempre accade, come ad esempio nel risultato di una partita di calcio o nelle previsioni del tempo per il giorno dopo. In questi casi, la valutazione della probabilità di un certo evento deve essere fatta con un quadro di riferimento diverso da quello dell'idea frequentista.

3. **SOGGETTIVISTA**
   Come si è detto sopra, ci sono situazioni in cui l'esperimento non può essere ripetuto. Si ricorre allora ad una definizione (dovuta a De Finetti) di probabilità in grado di esprimere numericamente il "grado di fiducia" che si vuole attribuire al verificarsi di un evento. In questo caso gli elementi dello spazio campione sono semplici ipotesi, cioè asserzioni che sono o false o vere. *La probabilità p(A) che l'ipotesi A sia vera, è il grado di fiducia che abbiamo circa il suo verificarsi.*
   Ad esempio se Tizio è disposto a scommettere 3 contro 4 sul fatto che si verifichi un certo evento, vuol dire che attribuisce a tale evento una probabilità pari a 3/(3+4) (circa il 43%). La frazione che esprime la probabilità ha il numeratore uguale a quello che Tizio è disposto a puntare e il denominatore pari alla sua puntata sommata a quella di uno sfidante. Tale somma rappresenta anche quanto ciascuno dei due partecipanti alla scommessa vincerebbe a seguito della puntata.

4. **ASSIOMATICA**
   Tale impostazione è dovuta a Kolmogorov (1933) il quale costruisce una teoria basata su entità astratte che non necessitano di alcuna interpretazione. *Il concetto di probabilità è definito da alcuni assiomi dai quali si possono derivare le diverse proprietà.*

I casi (3) e (4) esulano dagli obiettivi che il presente lavoro si prefigge, mentre i primi due casi costituiranno lo sfondo di riferimento per le esperienze presentate. In particolare, dato che questo approfondimento ha come scopo la **promozione di un approccio laboratoriale nello studio di un ramo della Matematica**, sarà privilegiata la concezione frequentista di probabilità, perché più adatta al supporto informatico. Il foglio elettronico Excel, con la sua rapidità di ricalcalo, costituisce l'ambiente di lavoro ideale per ogni esperienza che necessiti della **legge dei grandi numeri**. Il nostro percorso didattico si sviluppa proprio all'interno di questa applicazione.

IL METODO MONTE CARLO

In molti casi pratici il calcolo dell'area di una regione di piano non è facile (ad esempio l'area di una macchia). Il metodo Monte Carlo, che sfrutta le capacità di calcolo iterativo di un elaboratore, è l'unico che possa fornire almeno un valore approssimativo della misura cercata.
Si debba calcolare l'area di una superficie piana conoscendo una serie di punti del suo bordo. Si uniscano i punti con segmenti, o archi di parabola, o, a seconda dei casi, archi di curve note. L'area da determinare può essere espressa mediante un sistema di disequazioni. Si racchiude l'area da calcolare in un quadrato di lato unitario (cosa sempre possibile con una opportuna scelta delle unità di misura).
Supponiamo ora di disporre di due sequenze di numeri casuali distribuiti nell'intervallo (0;1) e consideriamo il punto P di coordinate (x;y) con x e y appartenenti rispettivamente alle due sequenze casuali e guardiamo se la coppia (x;y) soddisfa le disequazioni che definiscono l'area interessata. Ripetendo l'operazione un numero molto grande di volte (**legge dei grandi numeri**) il rapporto fra il numero di punti che cadono internamente all'area (**casi favorevoli**) e il numero totale di tentativi (**casi possibili**) approssima l'area considerata in quanto rappresenta il rapporto (**frequenza**) tra l'area della figura e l'area del quadrato in cui essa è racchiusa che, per le convenzioni fatte, è uguale a uno.
Ovviamente il metodo può essere applicato anche racchiudendo l'area da calcolare in un generico rettangolo di dimensioni (a, b).
Il metodo Monte Carlo ideato da Fermi venne utilizzato dallo stesso scienziato negli anni quaranta a Los Alamos, nell'ambito del progetto Copenaghen, per lo sviluppo della bomba atomica.

Gli argomenti che approfondiremo relativamente al calcolo delle aree sono i seguenti:

- Verifica del teorema di Archimede: l'area del segmento parabolico è 2/3 dell'area del rettangolo in cui è inscritto.
- Calcolo di un integrale definito che sia anche calcolabile algebricamente.
- Calcolo di un'area il cui calcolo algebrico sia eccessivamente complesso.

Questo metodo, oltre ad essere utile nel il calcolo delle aree, si può utilizzare anche nel calcolo della probabilità di un evento con approccio frequentista, ed è quello che faremo nei problemi sotto elencati:

- La moneta di Buffon
- I fiammiferi di Buffon
- Un problema algebrico connesso alle equazioni parametriche di secondo grado
- Estrazioni da un'urna
- Probabilita' di formare un poligono tagliando a caso un segmento
- Le passeggiate di Popeye

VERIFICA DEL TEOREMA DI ARCHIMEDE

Consideriamo una parabola con il vertice nell'origine degli assi (per comodità; comunque è sempre possibile eseguire una traslazione per portarla in questa posizione) e poiché la curva è simmetrica rispetto l'asse y, ne consideriamo solo la parte nel I quadrante.

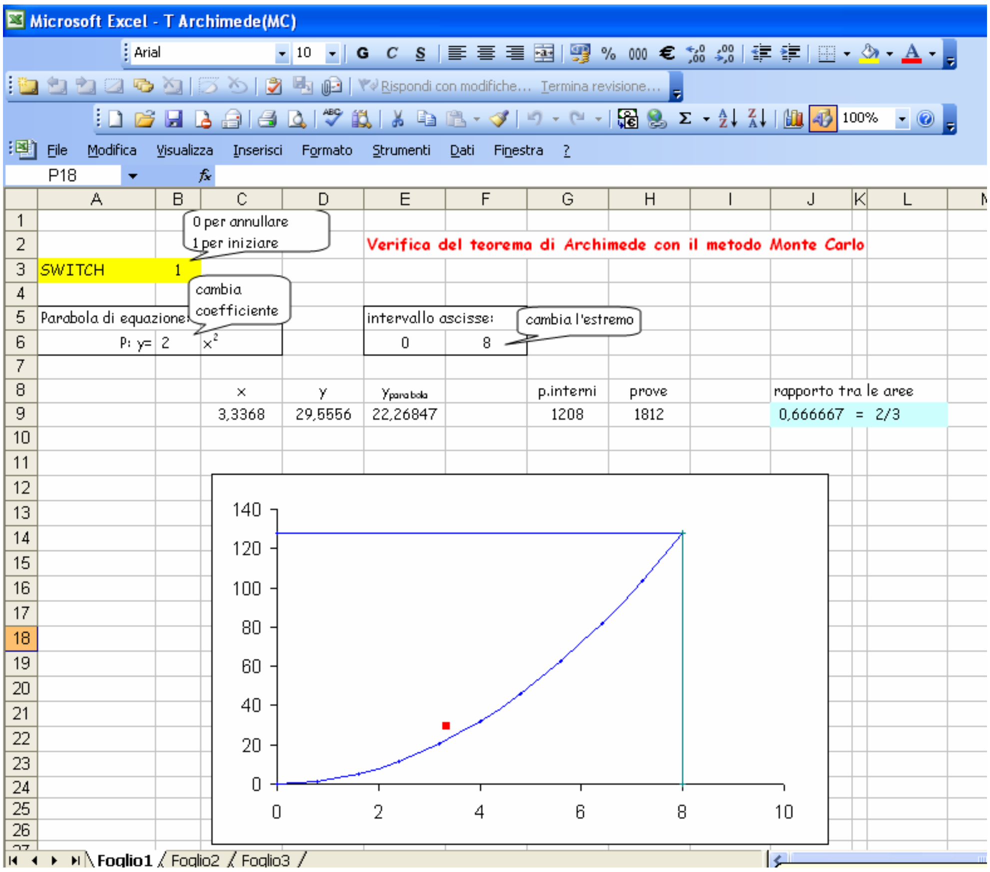
- in B6 poniamo il coefficiente del termine d II grado, in modo che possa essere variato e verificare il teorema in più casi;
- in E8 e F8 gli estremi dell'intervallo che limitano la curva;
- costruiamo una tabella che ci permetta di rappresentare la curva e le rette parallele agli assi cartesiani che la delimitano, individuando così il rettangolo che racchiude la figura di cui vogliamo calcolare l'area.

parabola		retta //asse x		retta // asse y	
x	y	x	y	x	y
=E6	=$B$6*C13^2	=$C$13	=$D$23	=$C$23	=$D$13
=C13+($F$6-$E$6)/10	=$B$6*C14^2	=$C$23	=$D$23	=$C$23	=$D$23
=C14+($F$6-$E$6)/10	=$B$6*C15^2				
=C15+($F$6-$E$6)/10	=$B$6*C16^2				
=C16+($F$6-$E$6)/10	=$B$6*C17^2				
=C17+($F$6-$E$6)/10	=$B$6*C18^2				
=C18+($F$6-$E$6)/10	=$B$6*C19^2				
=C19+($F$6-$E$6)/10	=$B$6*C20^2				
=C20+($F$6-$E$6)/10	=$B$6*C21^2				
=C21+($F$6-$E$6)/10	=$B$6*C22^2				
=C22+($F$6-$E$6)/10	=$B$6*C23^2				

Costruiamo così il grafico per la simulazione.

- Per rappresentare il punto che si muove nel rettangolo che delimita la curva, costruiamo in C9 e D9 due numeri casuali: il primo(x) che varia tra gli estremi 0, 8; il secondo (y) tra i corrispondenti estremi della funzione (questo perché la funzione è monotona):
  in C9 (x): =SE($B$3=1;CASUALE()*($F$6-$E$6)+$E$6;0)
  in D9 (y): =SE($B$3=1;CASUALE()*$B$6*$F$6^2;0)

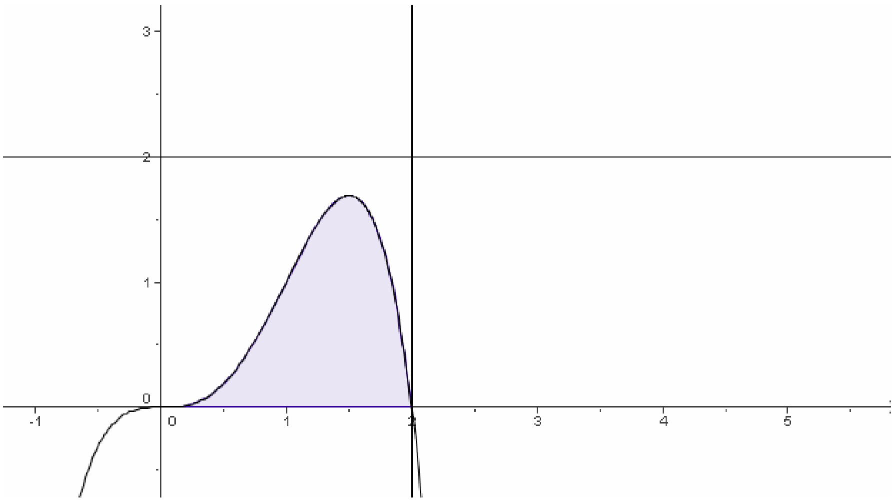
- In E9 poniamo l'ordinata della parabola relativa al valore casuale di x =$B$6*C9^2;
- in G9 un controllo se il punto casuale cade al di sopra della curva, nel qual caso il valore della cella verrà incrementato:
  =SE($B$3=1;SE(D9>=E9;G9+1;G9);0);
- in H9 un contatore delle prove effettuate: =SE($B$3=0;0;H9+1);
- in J9 il rapporto tra il numero di punti interni (compresi tra la curva e la retta parallela all'asse x) e le prove effettuate, che, se calcolato per un numero elevato di prove, conferma quanto noto, ossia che il rapporto tra le due aree è 2/3.
- Tutte le celle sono condizionate al valore 1 della cella B3 che funge da interruttore: se si vuole ripetere la simulazione si deve prima azzerare B3 (tutte le celle si azzereranno) e poi per iniziare dare il valore 1; il tasto F9 farà variare il punto casuale all'interno del rettangolo e incrementerà il numero delle prove.



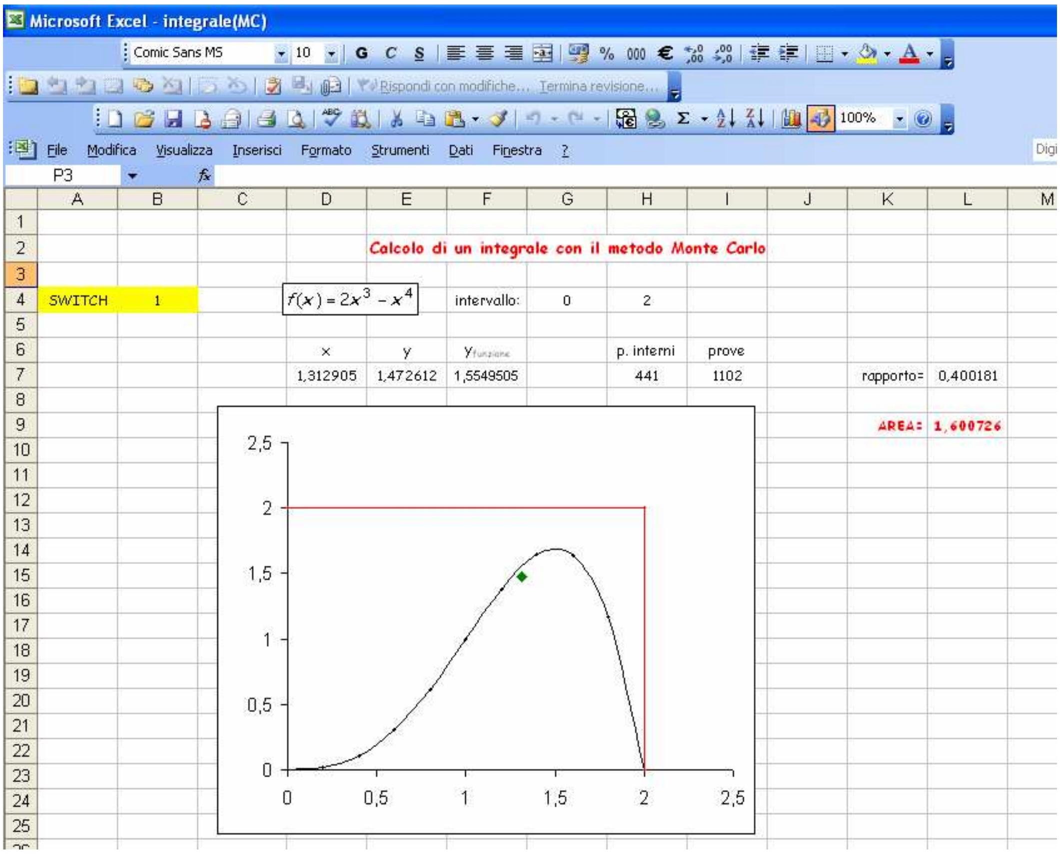
CALCOLO DI UN INTEGRALE DEFINITO

Calcolo dell'integrale della funzione $f(x) = 2x^3 - x^4$ nell'intervallo [0, 2]. Il calcolo può essere svolto algebricamente : $\int_0^2 (2x^3 - x^4)dx = \left[\frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{5}x^5\right]_0^2 = 8 - \frac{32}{5} = \frac{8}{5} = 1{,}6$

Per calcolarlo con il metodo Monte Carlo conviene fare il grafico della funzione nell'intervallo richiesto in modo da individuare un rettangolo che racchiude l'area in questione; in questo caso potremo considerare il quadrato di lato 2.



Ora costruiamo il foglio Excel per la simulazione, costruzione che è simile al caso precedente. Il valore dell'area è dato dal rapporto moltiplicato per 4 (area del rettangolo).



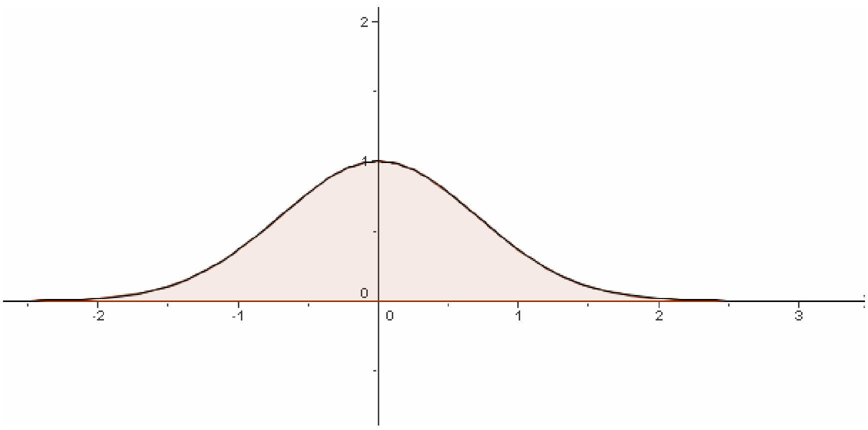
Anche in questo caso otteniamo un valore dell'area che poco si discosta dal valore calcolato algebricamente.

INTEGRALE DI GAUSS

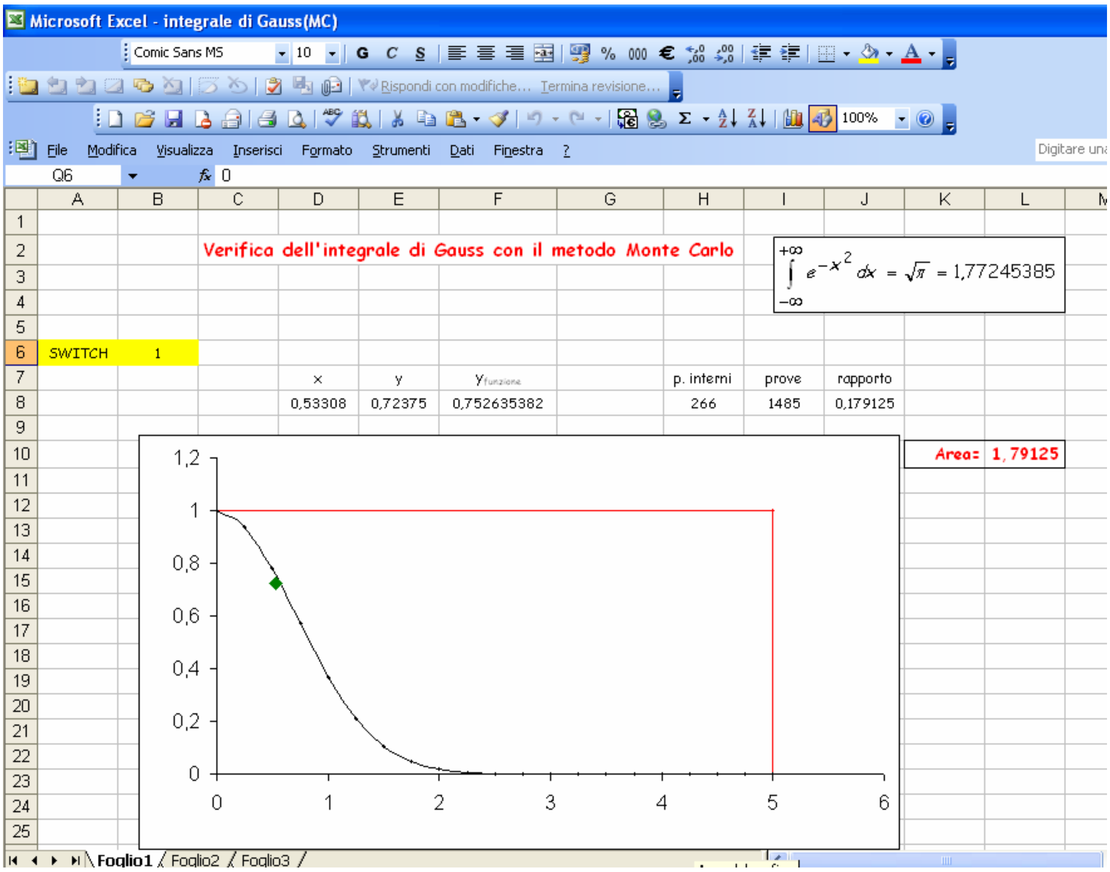
Possiamo verificare un integrale difficilmente calcolabile: l'integrale di Gauss (integrale che si presenta nello studio della densità di probabilità per variabili aleatorie continue):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

Rappresentiamo la funzione $f(x) = e^{-x^2}$ (lo si può fare semplicemente ad esempio utilizzando ambiente GeoGebra) possiamo notare che la funzione è pari ed ha il massimo in corrispondenza a $x = 0$ e che esso vale 1; si può vedere anche che la funzione tende a 0 molto rapidamente.



Queste considerazioni sono utili perché ci permettono di racchiudere la mezza figura in un rettangolo di altezza unitaria e di base ad esempio 5 (e non infinita!) in quanto la funzione assume valori molto prossimi allo zero già per x=2. Per il resto la costruzione del foglio è del tutto simile ai casi precedenti.



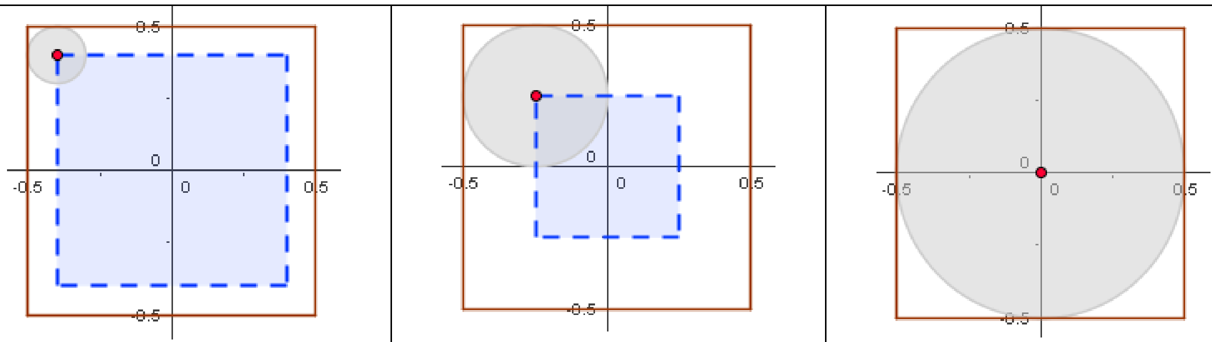
Poiché il calcolo di questo integrale è piuttosto complesso, la verifica con un metodo numerico di notevole importanza.

IL PROBLEMA DELLA MONETA DI BUFFON

Il problema consiste nella ricerca della probabilità che una moneta che cade su un pavimento piastrellato intercetti il bordo della piastrella.

Considerazioni teoriche

Nelle figure seguenti sono rappresentate alcune situazioni con raggi diversi della moneta. In particolare in (a) e (b) è possibile notare in azzurro il quadrato all'interno del quale deve cadere il centro della moneta per NON intercettare il contorno.
Nel caso (c) c'è la certezza dell'intersezione, mentre negli altri casi la probabilità dell'intersezione è data dal rapporto fra l'area della "corona quadrata" e quella del quadrato grande.
Per la moneta, **intercettare** o **non intercettare** il contorno rappresentano eventi **complementari**.



(a) (b) (c)

Formalizziamo il problema e cerchiamo di risolverlo in ambiente Excel.
Assumiamo che le piastrelle siano quadrate con **lato unitario** e che la moneta abbia **raggio R**; poi fissiamo un sistema di riferimento con l'origine al centro del quadrato.
Indicando con (x,y) le coordinate del centro della moneta, lo sazio **campionario S** entro cui le **variabili aleatorie x, y** si muoveranno, sarà:

$$S = \left\{ (x,y) \;\middle|\; \left(-\frac{1}{2} \le x \le +\frac{1}{2} \right) \wedge \left(-\frac{1}{2} \le y \le +\frac{1}{2} \right) \right\}$$

Sia *E* l'evento: *"la moneta intercetta il contorno della piastrella"*, e sia $\overline{E}$ il suo complementare.
L'evento $\overline{E}$ ha probabilità pari al rapporto fra l'area del quadrato interno e quella del quadrato esterno, per cui si ha:

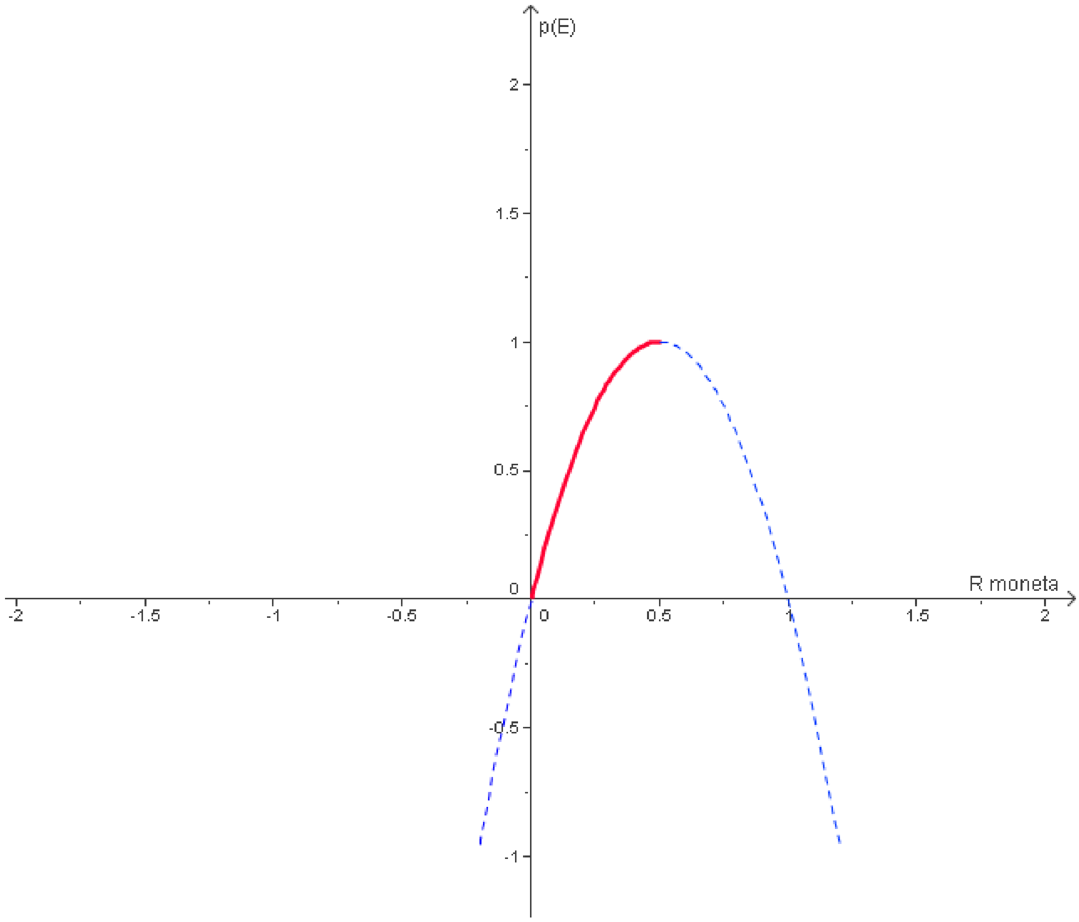
$$p(\overline{E}) = \frac{Area\ interna}{Area\ esterna} = \frac{(1-2R)^2}{1^2} = (1-2R)^2$$

Per l'evento E, allora, si ha:

$$p(E) = 1 - p(\overline{E}) = 1 - (1-2R)^2 = \ldots\ldots = 4R(1-R)$$

$$\boxed{p(E) = 4R(1 - R)}$$

Rappresentando la relazione appena scritta, si ottiene la parabola seguente, che deve essere considerata nel solo tratto in evidenza. Il grafico illustra, in particolare, che la certezza dell'intersezione tra bordo e moneta [p(E)=1] si ha quando R è metà del lato della piastrella (nell'esempio, 1/2), come avevamo già avuto modo di osservare (caso (c) della figura precedente).



Fin qui, la risposta teorica.

La simulazione in Excel

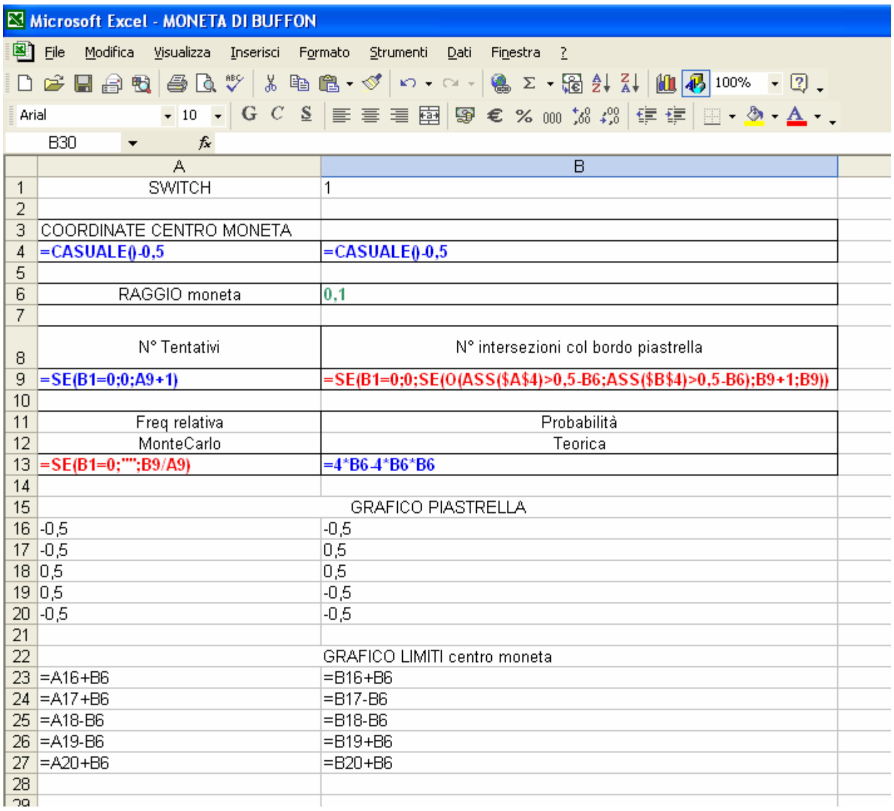
Descriveremo ora la soluzione del problema usando il foglio elettronico e il metodo Montecarlo. Generiamo a questo scopo un numero crescente di coppie di valori "casuali" x, y compresi tra -1/2 e +1/2, che considereremo come coordinate del centro della moneta virtuale, e andiamo a contare quante sono le coppie che cadono nel quadrato interno (casi favorevoli all'evento $\overline{E}$: *"la moneta **non** intercetta il contorno della piastrella"*). Il loro numero **f** sarà proporzionale all'area piccola, così come il totale delle coppie generate, **n**, sarà proporzionale all'area del quadrato esterno. La frequenza relativa ***Fr*** dell'evento $\overline{E}$ sarà:

$$Fr\left(\overline{E}\right) = \frac{f}{n}.$$

La risposta alla richiesta del problema è data dalla relazione:

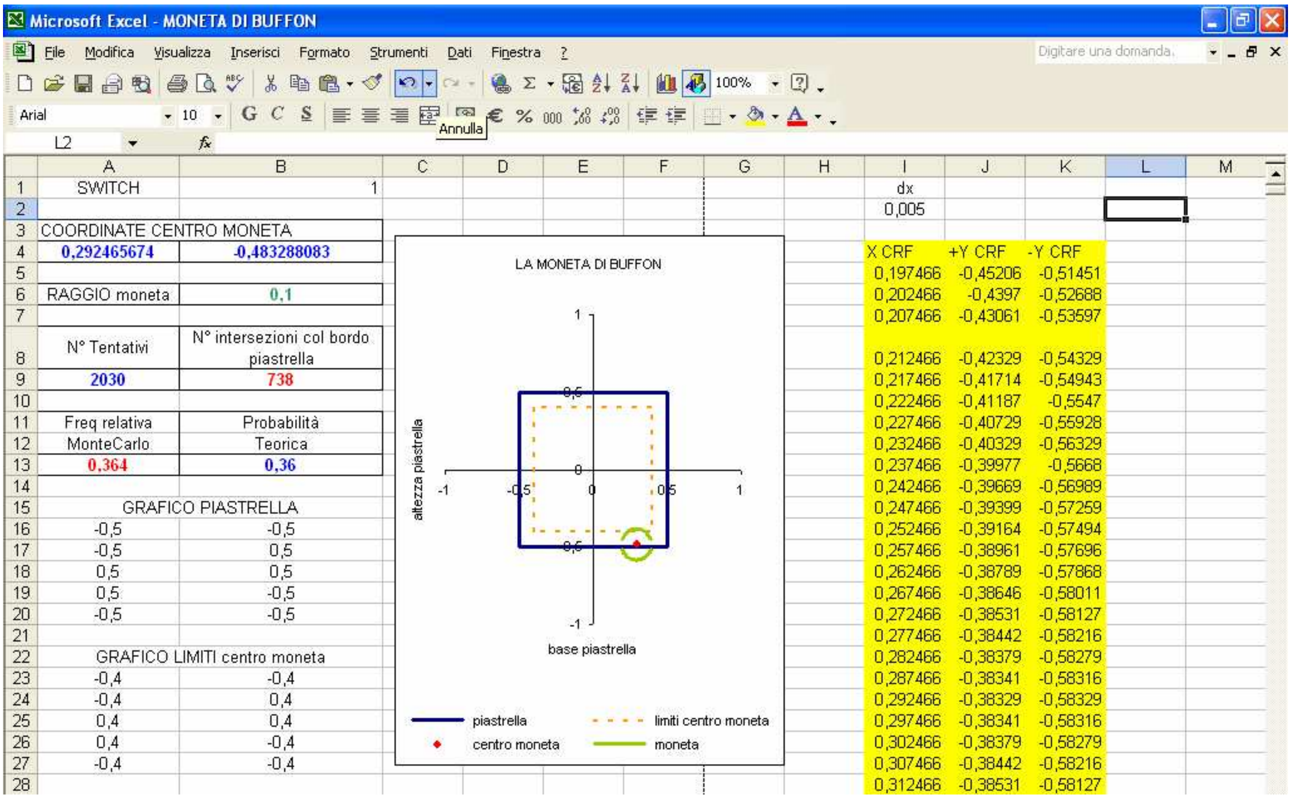
$$Fr(E) = 1 - Fr(\overline{E}) = 1 - \frac{f}{n}$$

Nella figura seguente si possono vedere le formule da usare per eseguire la simulazione.



	A	B
1	SWITCH	1
2		
3	COORDINATE CENTRO MONETA	
4	=CASUALE()-0,5	=CASUALE()-0,5
5		
6	RAGGIO moneta	0,1
7		
8	N° Tentativi	N° intersezioni col bordo piastrella
9	=SE(B1=0;0;A9+1)	=SE(B1=0;0;SE(O(ASS($A$4)>0,5-B6;ASS($B$4)>0,5-B6);B9+1;B9))
10		
11	Freq relativa	Probabilità
12	MonteCarlo	Teorica
13	=SE(B1=0;"";B9/A9)	=4*B6-4*B6*B6
14		
15	GRAFICO PIASTRELLA	
16	-0,5	-0,5
17	-0,5	0,5
18	0,5	0,5
19	0,5	-0,5
20	-0,5	-0,5
21		
22		GRAFICO LIMITI centro moneta
23	=A16+B6	=B16+B6
24	=A17+B6	=B17-B6
25	=A18-B6	=B18-B6
26	=A19-B6	=B19+B6
27	=A20+B6	=B20+B6
28		

Il foglio così impostato produce il risultato illustrato nella figura seguente.



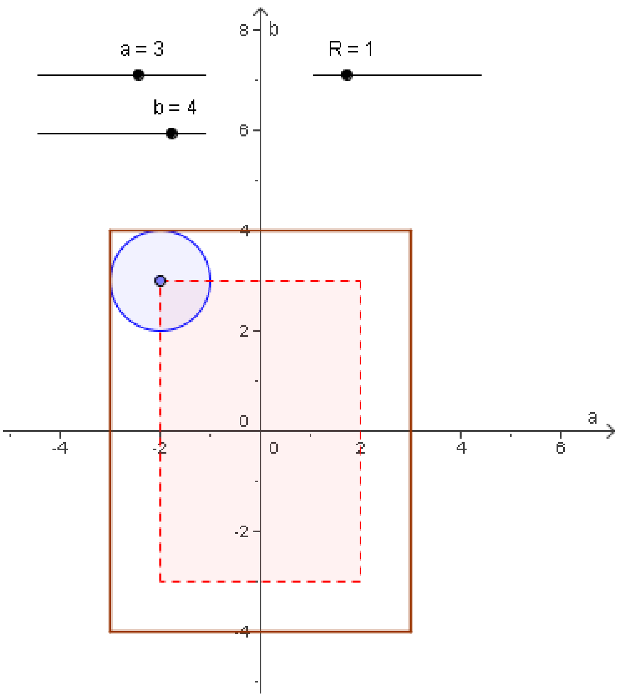
	A	B	I	J	K
1	SWITCH	1	dx		
2			0,005		
3	COORDINATE CENTRO MONETA				
4	0,292465674	-0,483288083	X CRF	+Y CRF	-Y CRF
5			0,197466	-0,45206	-0,51451
6	RAGGIO moneta	0,1	0,202466	-0,4397	-0,52688
7			0,207466	-0,43061	-0,53597
8	N° Tentativi	N° intersezioni col bordo piastrella	0,212466	-0,42329	-0,54329
9	2030	738	0,217466	-0,41714	-0,54943
10			0,222466	-0,41187	-0,5547
11	Freq relativa	Probabilità	0,227466	-0,40729	-0,55928
12	MonteCarlo	Teorica	0,232466	-0,40329	-0,56329
13	0,364	0,36	0,237466	-0,39977	-0,5668
14			0,242466	-0,39669	-0,56989
15	GRAFICO PIASTRELLA		0,247466	-0,39399	-0,57259
16	-0,5	-0,5	0,252466	-0,39164	-0,57494
17	-0,5	0,5	0,257466	-0,38961	-0,57696
18	0,5	0,5	0,262466	-0,38789	-0,57868
19	0,5	-0,5	0,267466	-0,38646	-0,58011
20	-0,5	-0,5	0,272466	-0,38531	-0,58127
21			0,277466	-0,38442	-0,58216
22	GRAFICO LIMITI centro moneta		0,282466	-0,38379	-0,58279
23	-0,4	-0,4	0,287466	-0,38341	-0,58316
24	-0,4	0,4	0,292466	-0,38329	-0,58329
25	0,4	0,4	0,297466	-0,38341	-0,58316
26	0,4	-0,4	0,302466	-0,38379	-0,58279
27	-0,4	-0,4	0,307466	-0,38442	-0,58216
28			0,312466	-0,38531	-0,58127

La tabella su sfondo giallo serve per rappresentare la moneta sul grafico.

Il valore zero in cella B1, seguito dalla pressione sul tasto funzione F9, permette di azzerare tutto; per ricominciare la simulazione si rimette in B1 il valore 1 e si schiaccia ripetutamente il tasto F9.
Nella cella A13 si potrà notare il valore della frequenza relativa evolvere verso la probabilità teorica man mano che il numero delle iterazioni aumenta (legge dei grandi numeri).
Nell'esempio si vede che dopo 2030 iterazioni (lanci virtuali della moneta) la *Fr(E)*, nelle cifre dei decimi e dei centesimi, coincide con *p(E)*.

Generalizzazione

Il problema affrontato può essere facilmente generalizzato alle piastrelle di forma rettangolare qualsiasi. La figura a lato illustra una di queste situazioni.
Indicando con **2a** e **2b** le dimensioni della piastrella generica, le considerazioni precedenti si modificano come di seguito indicato.
Se (x,y) sono, come prima, le coordinate del centro della moneta, lo sazio **campionario S** entro cui le **variabili aleatorie x, y** si muoveranno, ora sarà:



$$S = \{(x, y) \mid (-a \le x \le +a) \wedge (-b \le y \le +b)\}$$

con $(a > 0) \wedge (b > 0)$

Con gli eventi

E: *"la moneta intercetta il contorno della piastrella"*

$\overline{E}$: *"la moneta NON intercetta il contorno della piastrella",*

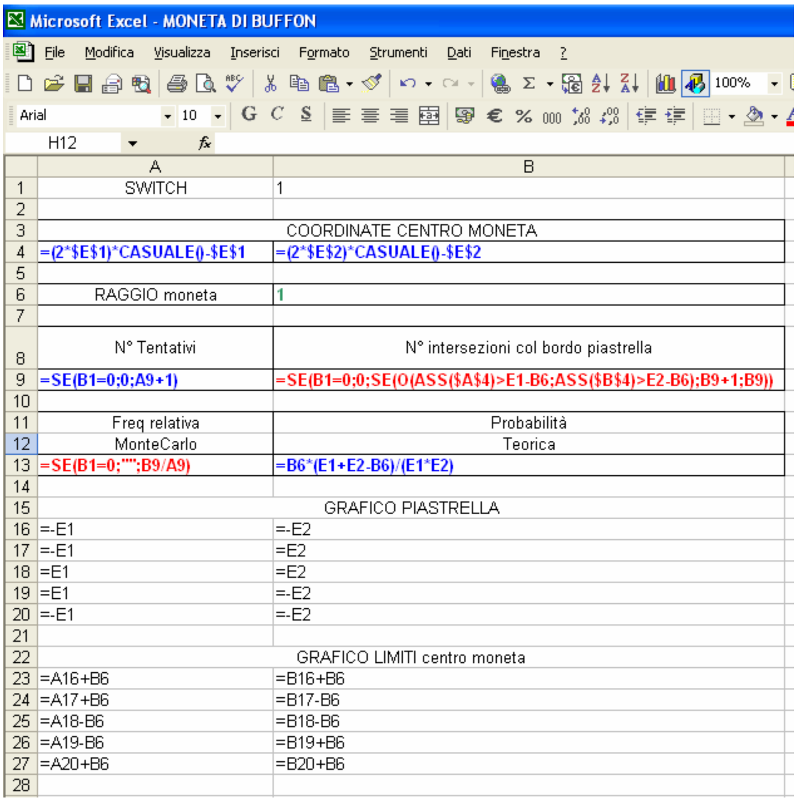
si ottiene:

$$p(\overline{E}) = \frac{\text{Area interna}}{\text{Area esterna}} = \frac{4(a-R)(b-R)}{4ab} = \frac{(a-R)(b-R)}{ab}$$

$$p(E) = 1 - p(\overline{E}) = 1 - \frac{(a-R)(b-R)}{ab} = \ldots\ldots\ldots = \frac{R(a+b-R)}{ab}$$

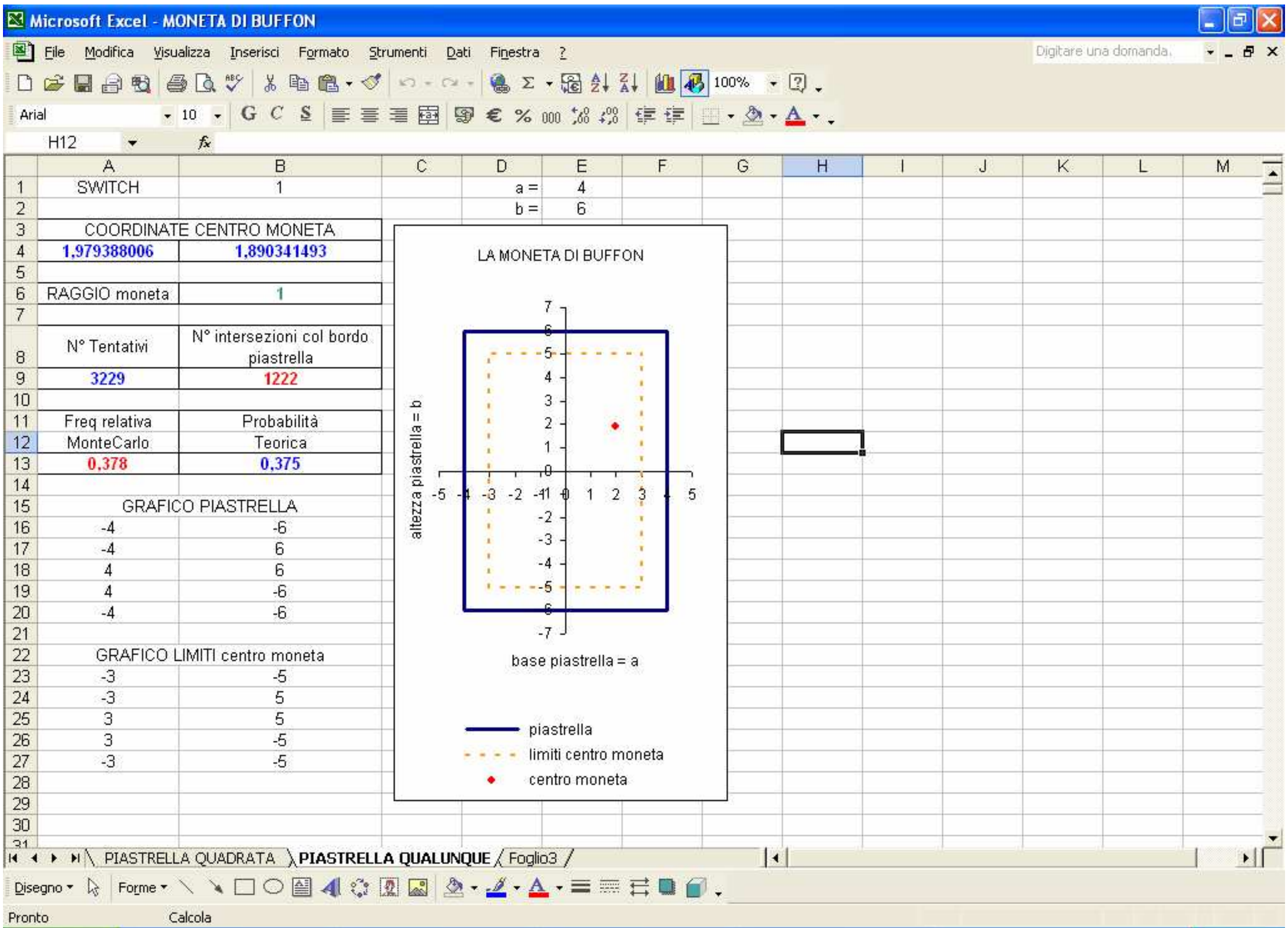
$$\boxed{p(E) = \frac{R(a+b-R)}{ab}}$$

Sul foglio elettronico la nuova situazione si traduce come risulta dalle seguenti figure (nella prima sono visibili le formule, nella seconda il foglio così come si presenta):



Microsoft Excel - MONETA DI BUFFON

	A	B
1	SWITCH	1
2		
3	COORDINATE CENTRO MONETA	
4	=(2*$E$1)*CASUALE()-$E$1	=(2*$E$2)*CASUALE()-$E$2
5		
6	RAGGIO moneta	1
7		
8	N° Tentativi	N° intersezioni col bordo piastrella
9	=SE(B1=0;0;A9+1)	=SE(B1=0;0;SE(O(ASS($A$4)>E1-B6;ASS($B$4)>E2-B6);B9+1;B9))
10		
11	Freq relativa	Probabilità
12	MonteCarlo	Teorica
13	=SE(B1=0;"";B9/A9)	=B6*(E1+E2-B6)/(E1*E2)
14		
15	GRAFICO PIASTRELLA	
16	=-E1	=-E2
17	=-E1	=E2
18	=E1	=E2
19	=E1	=-E2
20	=-E1	=-E2
21		
22	GRAFICO LIMITI centro moneta	
23	=A16+B6	=B16+B6
24	=A17+B6	=B17-B6
25	=A18-B6	=B18-B6
26	=A19-B6	=B19+B6
27	=A20+B6	=B20+B6
28		



Microsoft Excel - MONETA DI BUFFON

	A	B	C	D	E
1	SWITCH	1		a =	4
2				b =	6
3	COORDINATE CENTRO MONETA				
4	1,979388006	1,890341493			
5					
6	RAGGIO moneta	1			
7					
8	N° Tentativi	N° intersezioni col bordo piastrella			
9	3229	1222			
10					
11	Freq relativa	Probabilità			
12	MonteCarlo	Teorica			
13	0,378	0,375			
14					
15	GRAFICO PIASTRELLA				
16	-4	-6			
17	-4	6			
18	4	6			
19	4	-6			
20	-4	-6			
21					
22	GRAFICO LIMITI centro moneta				
23	-3	-5			
24	-3	5			
25	3	5			
26	3	-5			
27	-3	-5			

ATTIVITA' MONETA DI BUFFON

PROPOSTA 1

(A) Risolvi il problema della moneta di Buffon, di raggio R, nel caso in cui le mattonelle siano di forma rettangolare di base **b** e altezza **h**, dimostrando **per via formale** che

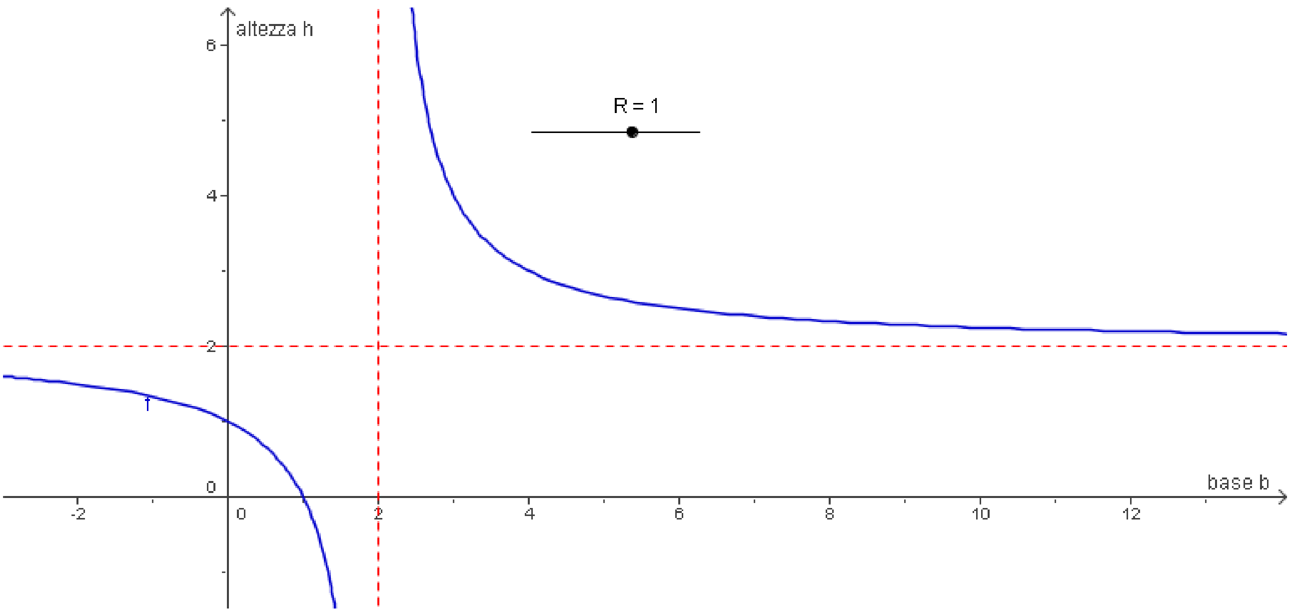
$$p(\overline{E}) = \frac{(b-R)(h-R)}{bh}$$

$$p(E) = \frac{R(h+b-R)}{hb}$$

con gli eventi

E: *"la moneta intercetta il contorno della piastrella"*
$\overline{E}$: *"la moneta NON intercetta il contorno della piastrella",*

(B) Usando R come parametro, ricava la relazione **h=f(b)** affinchè risulti p(E) = 1/2 . Mostra, usando **l'ambiente Cabri o Geogebra,** che risulta una curva come la seguente della quale ha senso considerare solo uno dei due rami



(C) Costruisci in **ambiente Cabri o Geogebra** un disegno interattivo in cui sia possibile variare le dimensioni della piastrella e il raggio della moneta che deve essere rappresentata internamente alla piastrella nella sua posizione limite (oltre la quale la moneta incontra il bordo), qualunque sia la scelta di **b, h** ed **R.**

(D) Progetta un foglio elettronico **Excel** attraverso il quale verificare la correttezza delle precedenti formule nel caso in cui i valori di **b, h** ed **R** siano rispettivamente 10, 6 e 0,5 unità.

Il foglio deve permettere di ricominciare da capo la simulazione.

(E) Generalizza il **foglio Excel** precedente in modo che si possano variare i valori di **b, h** ed **R.**

PROPOSTA 2

(A) Risolvi il problema della moneta di Buffon, di raggio R, nel caso in cui le mattonelle siano di forma triangolare di lato **L**, determinando **per via formale** le espressioni di $p(\overline{E}), p(E)$, dove

E: *"la moneta intercetta il contorno della piastrella"*

$\overline{E}$: *"la moneta NON intercetta il contorno della piastrella",*

(B) Costruisci in **ambiente Cabri o Geogebra** un disegno interattivo in cui sia possibile variare il lato **L** della piastrella e il raggio **R** della moneta, che deve essere rappresentata internamente alla piastrella nella sua posizione limite (oltre la quale la moneta incontra il bordo), qualunque sia la scelta di **L** ed **R.**

(C) Progetta un foglio elettronico **Excel** attraverso il quale verificare la correttezza delle precedenti formule nel caso in cui i valori di **L** ed **R** siano rispettivamente 8 e 1 unità.
Il foglio deve permettere di ricominciare da capo la simulazione.

(D) Generalizza il **foglio Excel** precedente in modo che si possano variare i valori di **L** ed **R.**

I FIAMMIFERI DI BUFFON

Lasciando cadere un pugno di fiammiferi su un foglio con rette parallele equidistanti, quanti di essi intersecheranno una delle rette?

Si tratta di un problema di **calcolo delle probabilità** risolvibile per via geometrica, che affronteremo

1. *applicando il Metodo Monte Carlo con l'uso dell'applicazione Excel,*
2. *seguendo la via formale.*

Metodo Monte Carlo con l'uso dell'applicazione Excel

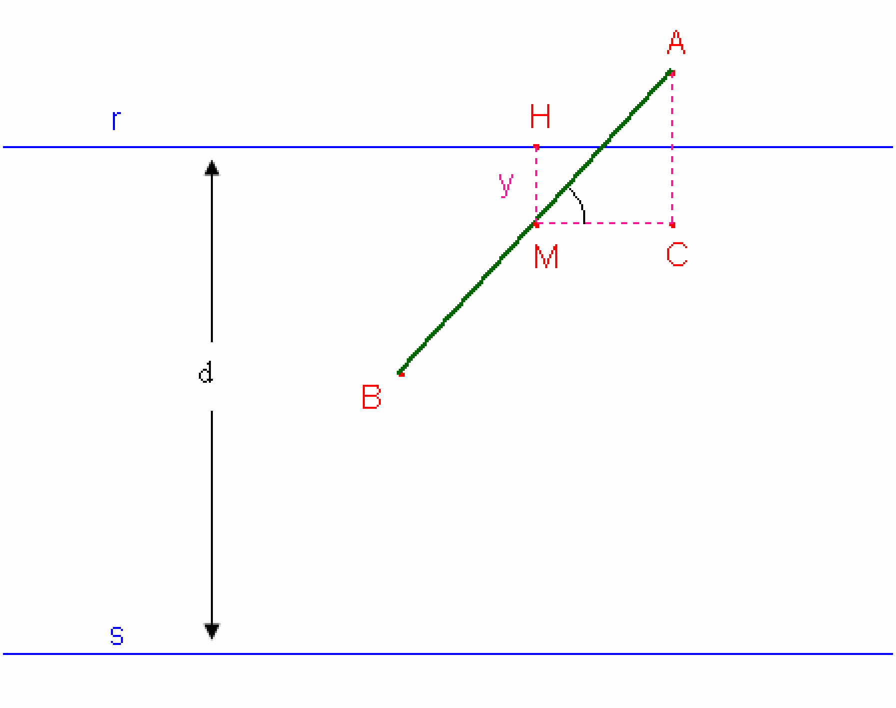
Prima di passare a considerare l'uso del foglio elettronico, occorre analizzare il problema allo scopo di scoprire su quali basi costruire l'algoritmo risolutivo. Ciò che faremo in questa parte di trattazione verrà sfruttato anche nella seconda parte quando applicheremo il calcolo integrale.
Assumiamo che i fiammiferi AB abbiano una lunghezza **L** e che le rette parallele abbiano una distanza pari a **d** (vedi figura). Supponiamo, inoltre, che risulti **L < d**.
Poniamo:

$A\hat{M}C = x$

$\overline{HM} = y$

con M punto medio di AB
Un fiammifero interseca una delle rette solo se risulta soddisfatta la condizione $y < \overline{AC}$, cioè se

$y < \frac{L}{2}\sin x$

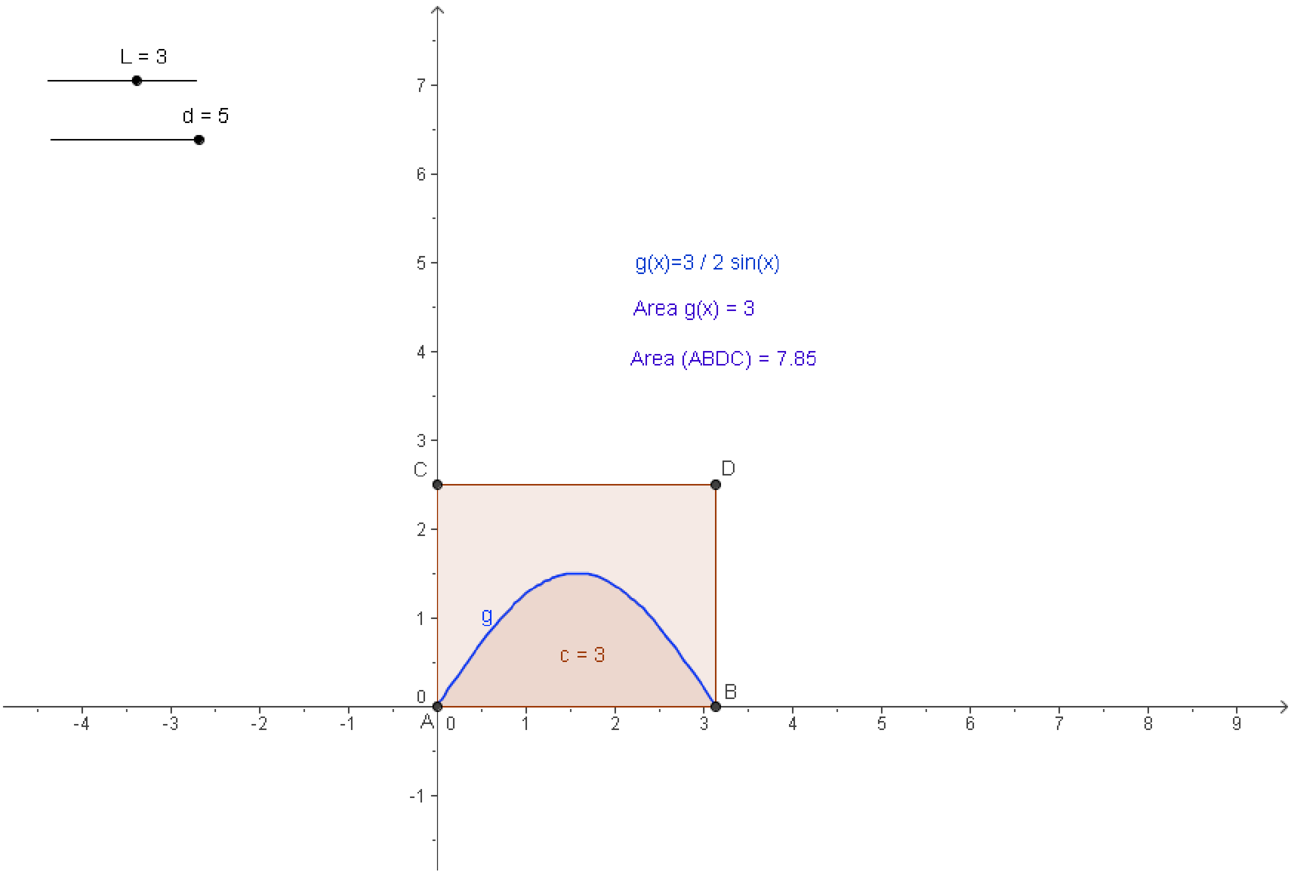


I limiti geometrici per y e x, sono i seguenti: $0 \le x \le \pi \quad \wedge \quad 0 \le y \le \frac{d}{2}$.

Quindi l'evento E:"*il fiammifero interseca una delle rette*", ammette come casi favorevoli quelli dati dalla relazione $y < \frac{L}{2}\sin x$, mentre l'insieme dei casi possibili è definito dalle condizioni

$0 \le x \le \pi \quad \wedge \quad 0 \le y \le \frac{d}{2}$.

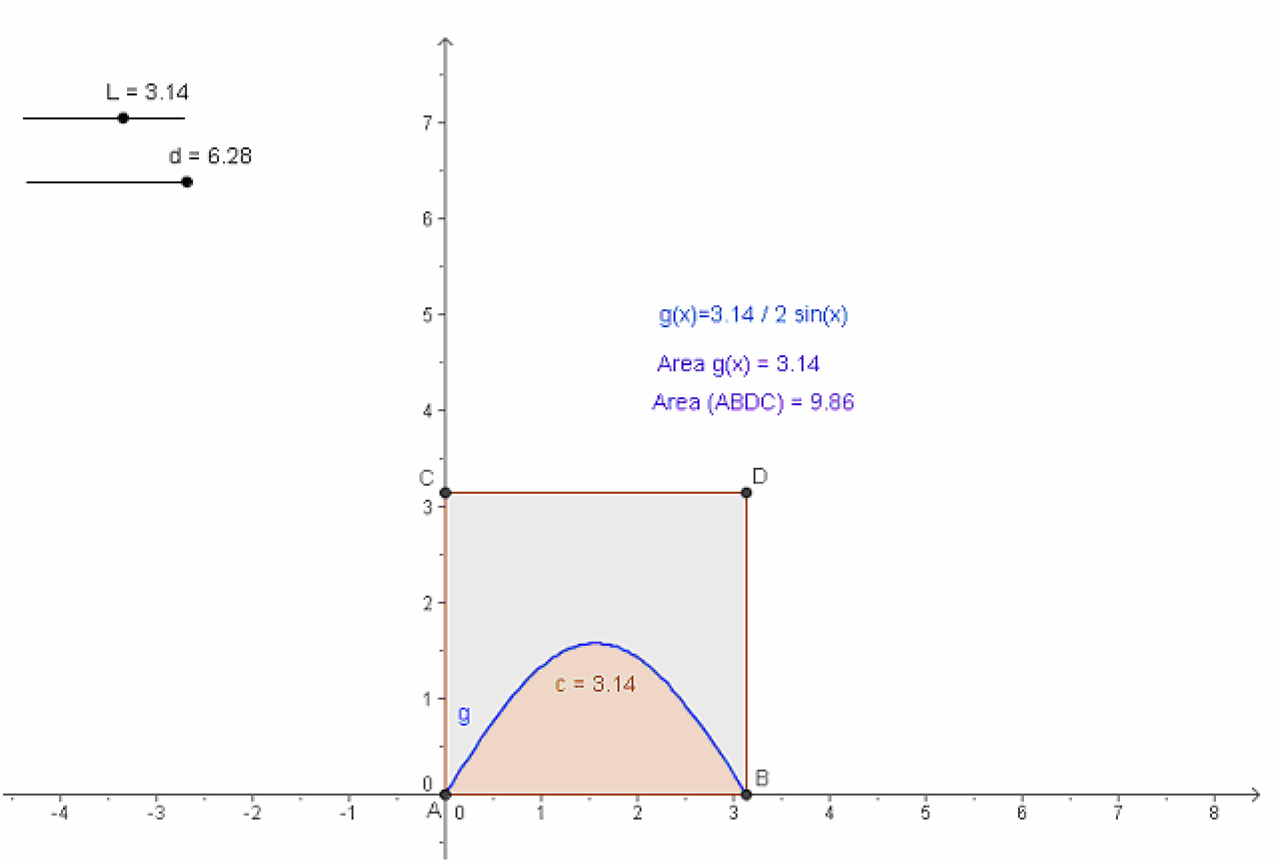
Interpretando geometricamente in un piano (x,y) le precedenti considerazioni, la probabilità dell'evento E, risulta dal rapporto fra l'area sottesa dalla curva di equazione $y = \frac{L}{2}\sin x$ e l'area del rettangolo di dimensioni $\pi, \frac{d}{2}$. Nella figura seguente, costruita in ambiente GeoGebra, si vede un esempio con $L = 3,\ d = 5$



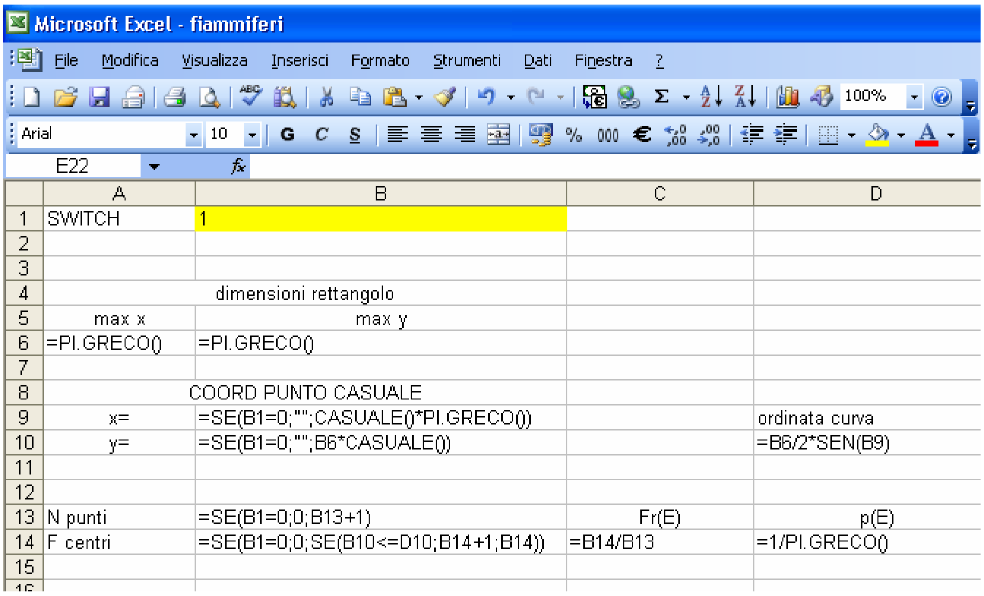
Immaginando di trattare il problema *senza l'uso dell'analisi matematica*, si pone la questione del calcolo dell'area sottesa dalla curva. Ecco quindi che torna comodo far riferimento al metodo Monte Carlo. In ambiente Excel si generano N punti casuali all'interno del rettangolo e si contano quelli, F, che cadono al di sotto della curva. Il rapporto fra F ed N si chiama frequenza relativa (Fr) e per N crescente, tende al rapporto fra le aree delle due figure (*legge dei grandi numeri*). Quindi:

Fr(E) = F/N

Di seguito un esempio di figura con L = d/2 = π e la relativa simulazione in Excel.

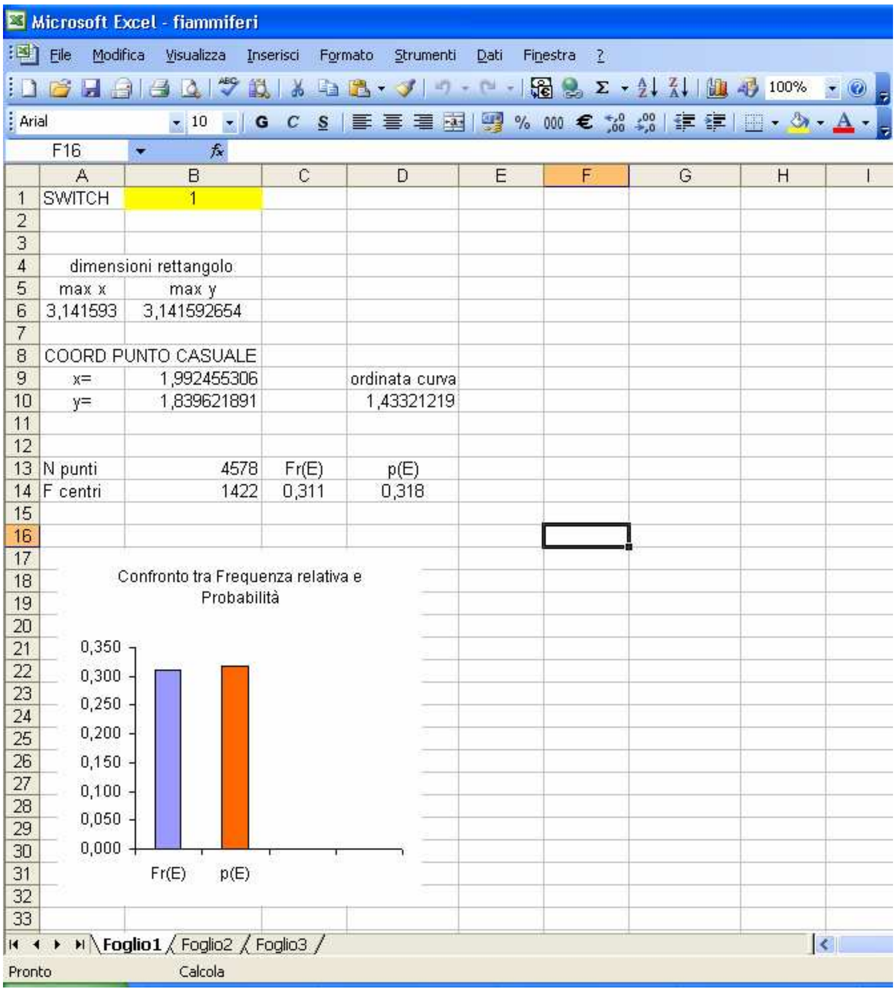


Nelle prossime figure si vedono le formule usate e ciò che esse producono sul foglio:



	A	B	C	D
1	SWITCH	1		
2				
3				
4		dimensioni rettangolo		
5	max x	max y		
6	=PI.GRECO()	=PI.GRECO()		
7				
8		COORD PUNTO CASUALE		
9	x=	=SE(B1=0;"";CASUALE()*PI.GRECO())		ordinata curva
10	y=	=SE(B1=0;"";B6*CASUALE())		=B6/2*SEN(B9)
11				
12				
13	N punti	=SE(B1=0;0;B13+1)	Fr(E)	p(E)
14	F centri	=SE(B1=0;0;SE(B10<=D10;B14+1;B14))	=B14/B13	=1/PI.GRECO()
15				

In B1 c'è la cella che permette di **azzerare** (mettendo 0 seguito dalla pressione sul tasto di ricalcalo F9) e **ricominciare** (mettendo 1 e poi schiacciando ripetutamente il tasto F9).
La formula in B14 permette di contare i punti, generati a caso in B9 e B10, che stanno al di sotto della curva g(x), cioè i punti favorevoli all'evento E:"*il fiammifero interseca una delle rette*".



Come si vede, osservando il grafici e le celle C14 e D14, **il metodo Monte Carlo risulta affidabile quando N cresce**, e fornisce un valore per Fr(E) che è una stima attendibile del valore di probabilità dell'evento E (la probabilità è stata calcolata per via formale, come verrà illustrato tra un po').
La trattazione finora svolta non esige abilità particolari di calcolo, e può essere seguita con la conoscenza delle definizioni di probabilità e frequenza relativa, della legge dei grandi numeri e di semplici relazioni trigonometriche. Quindi per chi non conosce l'analisi matematica il discorso si può concludere qui.

Soluzione formale

Se lo stesso problema si affronta in quinta, allora c'è la possibilità di eseguire il calcolo preciso del valore della probabilità, ricorrendo al calcolo integrale. Vediamo come.

$$p(E) = p\left(y \le \frac{L}{2}\sin x \right) = \frac{\mathit{Casi\ FAVOREVOLI}}{\mathit{Casi\ POSSIBILI}} = \frac{\mathit{Area\ sottesa\ dalla\ curva}}{\mathit{Area\ Rettangolo}} = \frac{\int_0^{\pi} \frac{L}{2}\sin x\,dx}{\pi \frac{d}{2}} =$$

$$= \frac{\frac{L}{2}\left| -\cos x \right|_0^{\pi}}{\pi \frac{d}{2}} = \frac{\frac{L}{2}\left(1-(-1)\right)}{\pi \frac{d}{2}} = \frac{2L}{\pi d}$$

$$p(E) = \frac{2L}{\pi d}$$

Nel caso trattato prima, avevamo L = d/2 = π. Sostituendo nell'ultima formula, avremo:

$$p(E) = \frac{2L}{\pi d} = \frac{2\pi}{\pi(2\pi)} = \frac{1}{\pi} = 0{,}318...$$

Quest'ultimo valore è quello che abbiamo usato nella simulazione in Excel per il confronto con la frequenza relativa.

ATTIVITA' FIAMMIFERI DI BUFFON

PROPOSTE

(A)

Costruisci in **ambiente Cabri o Geogebra** un disegno interattivo, basato sulle condizioni del problema che qui riportiamo,

$$y < \frac{L}{2}\sin x \qquad 0 \le x \le \pi \ \wedge \ 0 \le y \le \frac{d}{2},$$

in cui sia possibile variare i valori di **d** e di **L**

(B)

La parte iniziale del presente studio è stata svolta nell'ipotesi che fosse **L < d.** Esamina ora la situazione che si presenta quando **L > d** illustrandola graficamente.
Calcola la probabilità dell'evento E:"*il fiammifero interseca una delle rette*" , facendo uso del teorema di Archimede.

(C)

Risolvi il caso precedente ricorrendo all'uso del calcolo integrale.

(D)

Progetta un foglio elettronico **Excel** attraverso il quale verificare la correttezza delle precedenti formule nel caso in cui i valori di **L** e **d** siano rispettivamente 5 e 3 unità.
Il foglio deve permettere di ricominciare da capo la simulazione.

(E)

Generalizza il **foglio Excel** precedente in modo che si possano variare i valori di **L** e **d**.

(F)

Se **N'** è il numero di volte in cui il fiammifero incrocia la linea di confine ed **N** il numero dei tentativi fatti, il metodo Monte Carlo ci dice che p(E)=N'/N, con E:"*il fiammifero interseca una delle rette*".
Partendo dal risultato raggiunto nella fase di studio del problema, che qui riportiamo,

$$p(E) = \frac{2L}{\pi d},$$

progetta un foglio elettronico Excel attraverso il quale approssimare, col metodo Monte Carlo, il valore di pi greco.

UN PROBLEMA ALGEBRICO

Un interessante problema riconducibile alla geometria e al metodo Monte Carlo è quello del calcolo della probabilità che una equazione di secondo grado con due parametri, abbia soluzioni reali quando i parametri variano a caso in un intervallo reale predefinito.

Consideriamo un esempio concreto.

Data l'equazione $x^2 + bx + c = 0$, determiniamo la probabilità di avere soluzioni in R se b, c vengono presi a caso nell'intervallo [-4,4].

Risolveremo il problema seguendo **<u>tre percorsi</u>** che non sono necessariamente alternativi, anche se ognuno di essi può essere svolto in forma autonoma. Anzi riteniamo che i tre approcci si possano completare a vicenda contribuendo così ad una migliore comprensione dei concetti coinvolti. Dipende dalle conoscenze di chi ci ascolta. Ecco i tre modi:

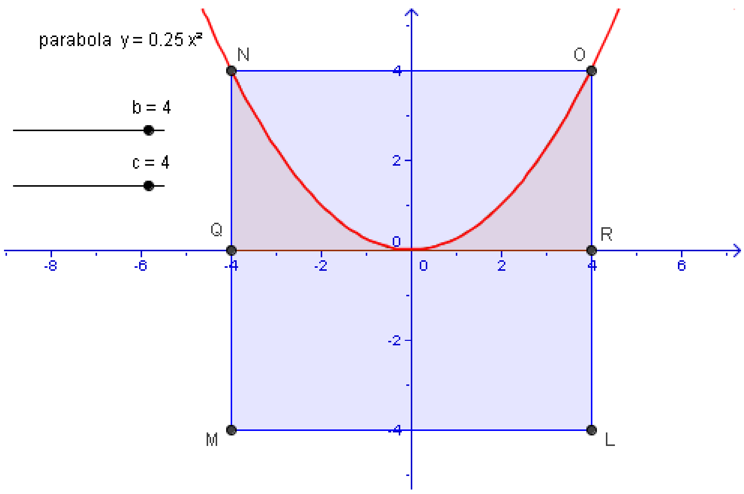
1. *Risoluzione formale con semplici conoscenze di geometria analitica*
2. *Risoluzione ricorrendo ad un semplice calcolo integrale*
3. *Simulazione con il metodo Monte Carlo in anbiente Excel*

1. Risoluzione formale con semplici conoscenze di geometria analitica

Perché l'equazione $x^2 + bx + c = 0$ ammetta soluzioni reali occorre che il suo discriminante risulti positivo o nullo: $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$.

Dato che a=1, si ha: $c \leq \frac{b^2}{4}$.

Questa disequazione deve essere soddisfatta con i limiti imposti dalla condizione che b, c appartengano all'intervallo [-4,4].
Interpretando geometricamente il problema, le coppie di valori (b,c) prese a caso nell'intervallo indicato, appartengono al quadrato NOLM (figura seguente), mentre quelle che soddisfano la condizione $c \leq \frac{b^2}{4}$, cadono sotto la parabola di equazione $c = \frac{b^2}{4}$.



Usando la sintassi consueta, scriveremo:

$$f(x) = \frac{x^2}{4}, \quad -4 \leq x \leq 4 \ \wedge \ -4 \leq f(x) \leq 4$$

La probabilità cercata sarà data dal rapporto fra l'area del della parte di quadrato che giace al di sotto della parabola e l'area del quadrato stesso.
Applicando la formula di Archimede per il calcolo del segmento parabolico e con riferimento alla figura precedente, si ha:

$$Area\ segmento\ parabolico = \frac{2}{3} \cdot Area\ rettangolo\ circoscritto$$

$$As = \frac{2}{3} A(NORQ)$$

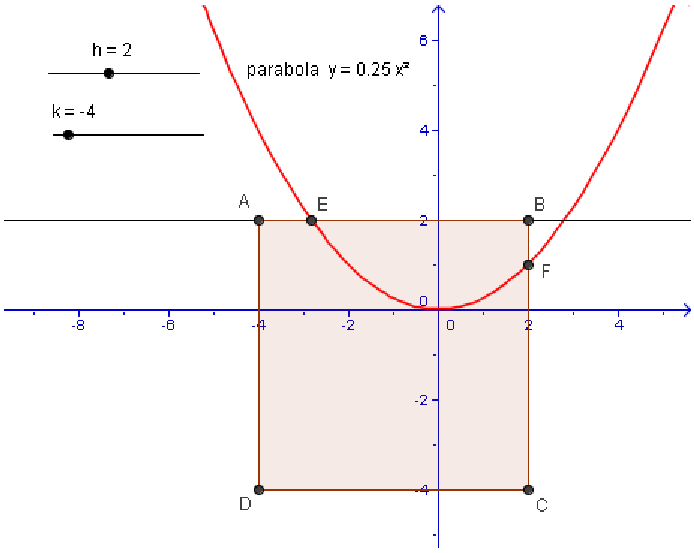
Quindi (omettendo sempre le u. di m.): $p(E) = \dfrac{A(NOLM) - As}{A(NOMN)} = \dfrac{64 - \frac{2}{3} \cdot 8 \cdot 4}{64} = \dfrac{2}{3}$

2. Risoluzione ricorrendo ad un semplice calcolo integrale

Se si conosce il calcolo integrale, si procede come segue (le u. di m. sono state omesse per semplicità):

$$p(E) = \frac{A(MQRL) + \int_{-4}^{+4} \frac{x^2}{4}\,dx}{A(MNOL)} = \frac{4 \cdot 8 + \int_{-4}^{+4} \frac{x^2}{4}\,dx}{8 \cdot 8} = \frac{32 + \frac{128}{12}}{64} = \frac{2}{3}$$

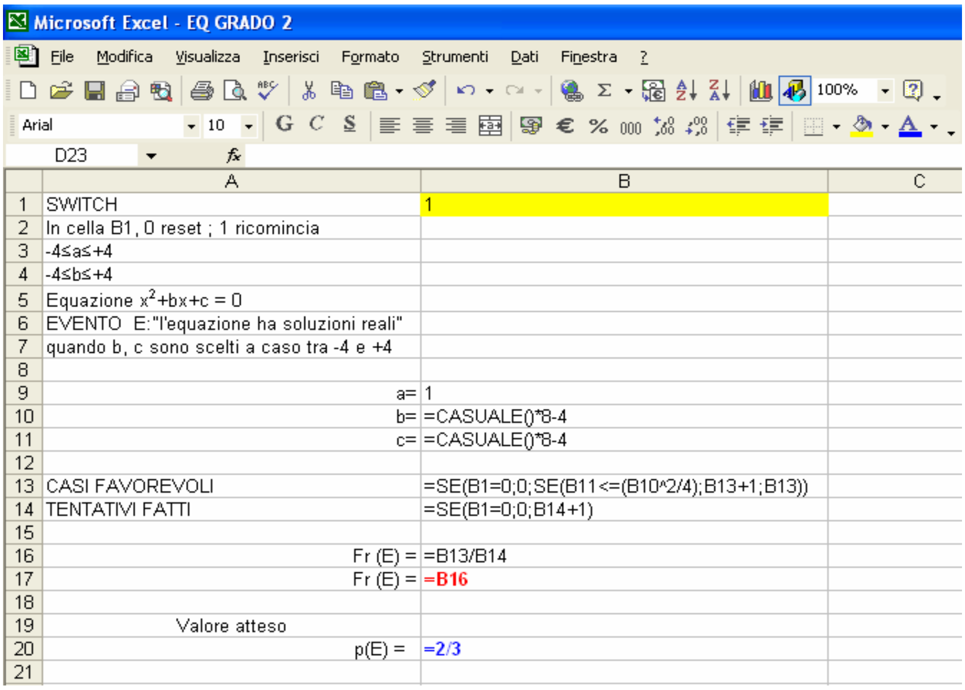
Sia nel presente caso, sia nel caso (1), l'intervallo entro il quale scegliere i valori dei coefficienti **b,c** è del tutto arbitrario. Se si decidesse di considerare valori non simmetrici rispetto all'origine, il quadrato potrebbe assumere una configurazione simile alla seguente, mentre la parabola rimmarrebbe al suo posto. Il calcolo, ovviamente, andrebbe rifatto.



Nell'esempio i coefficienti b, c sono scelti tra i valori -4 e +2.

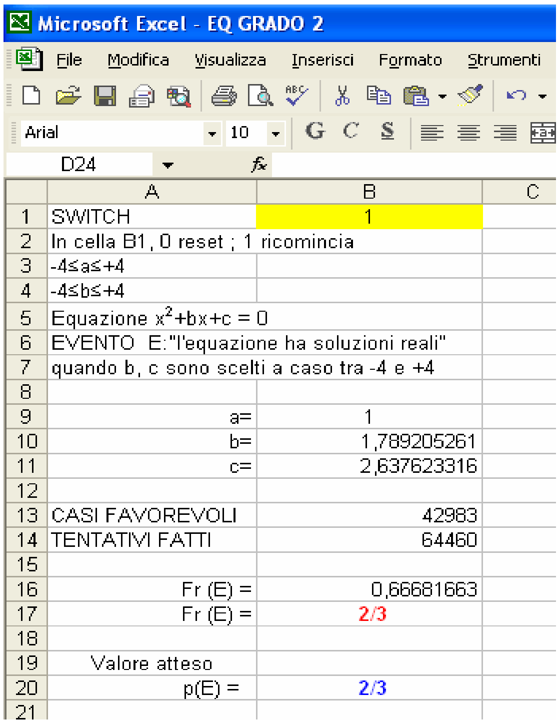
3. Simulazione con il metodo Monte Carlo in ambiente Excel

Progettiamo un foglio Excel con le formule indicate nella prossima figura:



	A	B	C
1	SWITCH	1	
2	In cella B1, 0 reset ; 1 ricomincia		
3	-4≤a≤+4		
4	-4≤b≤+4		
5	Equazione x^2+bx+c = 0		
6	EVENTO E:"l'equazione ha soluzioni reali"		
7	quando b, c sono scelti a caso tra -4 e +4		
8			
9	a=	1	
10	b=	=CASUALE()*8-4	
11	c=	=CASUALE()*8-4	
12			
13	CASI FAVOREVOLI	=SE(B1=0;0;SE(B11<=(B10^2/4);B13+1;B13))	
14	TENTATIVI FATTI	=SE(B1=0;0;B14+1)	
15			
16	Fr (E) =	=B13/B14	
17	Fr (E) =	=B16	
18			
19	Valore atteso		
20	p(E) =	=2/3	
21			

In B10 e B11 compaiono le formule per la generazione “casuale” dei valori dei coefficienti a,b nell’intervallo numerico tra -4 e +4.
La formula nella cella B13 conta i casi favorevoli all’evento E:”l’equazione ha soluzioni reali”, mentre quella in B14 conta i tentativi fatti.
La cella B1 condiziona le formule in B13 e B14 permettendo di ricominciare il gioco, semplicemente inserendo prima il valore 0 seguito da “invio” e poi il valore 1. Il ricalcolo si ottiene come al solito col tasto funzione F9.



	A	B	C
1	SWITCH	1	
2	In cella B1, 0 reset ; 1 ricomincia		
3	-4≤a≤+4		
4	-4≤b≤+4		
5	Equazione x^2+bx+c = 0		
6	EVENTO E:"l'equazione ha soluzioni reali"		
7	quando b, c sono scelti a caso tra -4 e +4		
8			
9	a=	1	
10	b=	1,789205261	
11	c=	2,637623316	
12			
13	CASI FAVOREVOLI	42983	
14	TENTATIVI FATTI	64460	
15			
16	Fr (E) =	0,66681663	
17	Fr (E) =	2/3	
18			
19	Valore atteso		
20	p(E) =	2/3	
21			

Il problema finora trattato si può generalizzare facendo in modo che i valori dei coefficienti b, c siano generati a caso tra –k e +k (invece che tra -4 e +4) con k scelto dall’utente. Nelle prossime figure viene illustrato questo caso.

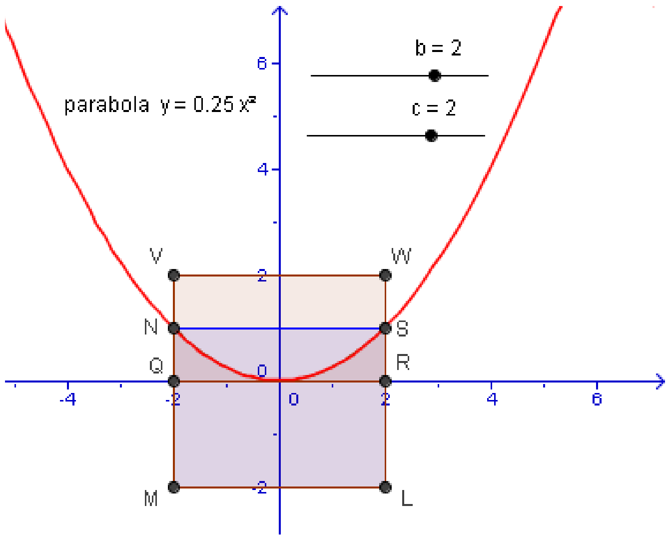
Il valore del parametro k deve essere inserito nella cella C3. Si notino le modifiche apportate alle formule delle celle C12 e C13, per adattarle alla nuova situazione. I valori rappresentati, sono relativi a k=2.

Microsoft Excel - EQ GRADO 2

	A	B	C
1	SWITCH	1	
2	In cella B1, 0 reset ; 1 ricomincia		
3	-k≤a≤+k	k=	2
4	-k≤b≤+k		
5	Equazione x^2+bx+c = 0		
6	EVENTO E:"l'equazione ha soluzioni reali"		
7	quando b, c sono scelti a caso tra -k e +k		
8		a=	1
9		b=	=CASUALE()*2*$C$3-$C$3
10		c=	=CASUALE()*2*$C$3-$C$3
11			
12			
13	CASI FAVOREVOLI	=SE(B1=0;0;SE(C10<=(C9^2/4);B13+1;B13))	
14	TENTATIVI FATTI	=SE(B1=0;0;B14+1)	
15			
16	Fr =	=B13/B14	
17	Fr =	=B16	
18			
19	Valore atteso		
20	p(E) =	=7/12	
21			
22			

Microsoft Excel - EQ GRADO 2

	A	B	C	D
1	SWITCH	1		
2	In cella B1, 0 reset ; 1 ricomincia			
3	-k≤a≤+k	k=	2	
4	-k≤b≤+k			
5	Equazione x^2+bx+c = 0			
6	EVENTO E:"l'equazione ha soluzioni reali"			
7	quando b, c sono scelti a caso tra -k e +k			
8		a=	1	
9		b=	-0,562482762	
10		c=	1,126014887	
11				
12				
13	CASI FAVOREVOLI	7632		
14	TENTATIVI FATTI	13065		
15				
16	Fr =	0,584156142		
17	Fr =	7/12		
18				
19	Valore atteso			
20	p(E) =	7/12		
21				



Un rapido calcolo riferito alla figura qui sopra, mostra che il rapporto fra l'area del quadrilatero mistilineo MNOSL (casi favorevoli) e quella del quadrato MVWL (casi possibili) conduce al valore di probabilità teorica p(E)= 7/12

ATTIVITA' RELATIVE AL PROBLEMA ALGEBRICO

PROPOSTE

(A)

Considera l'equazione di partenza $x^2+bx+c=0$ e calcola la probabilità di avere soluzioni reali quando i coefficienti **b** e **c** vengono scelti a caso nell'intervallo [-4,2]. Verifica la formula trovata col metodo Monte Carlo.

(B)

Considera l'equazione

$ax^2+x+c=0$

e calcola la probabilità di avere soluzioni reali quando i coefficienti **a** e **c** vengono scelti a caso nell'intervallo [-4,4]. Verifica la formula trovata col metodo Monte Carlo.

(C)

Considera l'equazione

$ax^2+bx+1=0$

e calcola la probabilità di avere soluzioni reali quando i coefficienti **a** e **b** vengono scelti a caso nell'intervallo [-5,5]. Verifica la formula trovata col metodo Monte Carlo.

(D)

Considera l'equazione

$\frac{1}{2}x^2+bx+c=0$

e calcola la probabilità di avere soluzioni reali quando i coefficienti **b** e **c** vengono scelti a caso nell'intervallo [-4,4]. Verifica la formula trovata col metodo Monte Carlo.

(E)

Relativamente al caso (B), costruisci in ambiente Cabri o Geogebra un disegno interattivo con quale mettere in evidenza le aree interessate al rapporto che fornisce la probabilità dell'evento E:"*l'equazione ammette soluzioni reali*", quando i coefficienti a e c vengono scelti a caso in un intervallo di estremi h, k variabili a piacere.

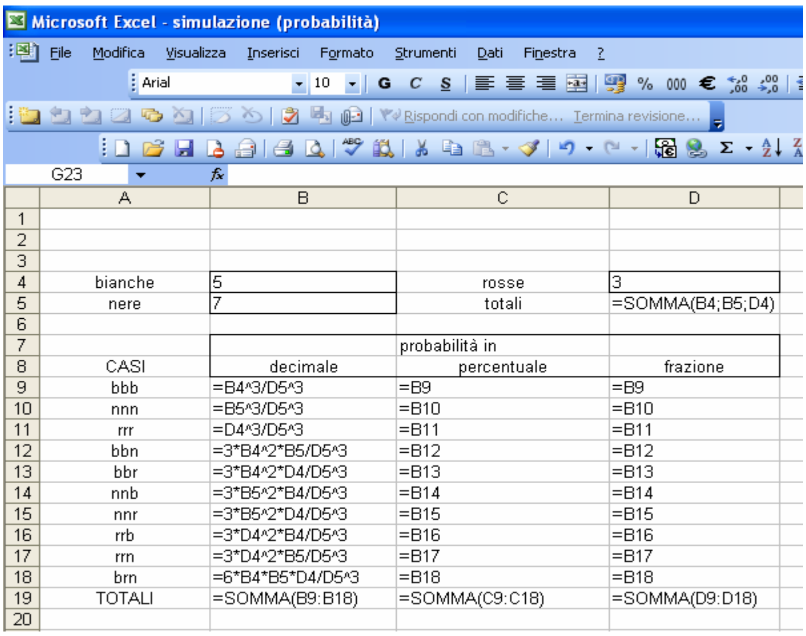
ESTRAZIONI DA UN'URNA

Problema: In un'urna ci sono b palline bianche, n nere, r rosse. Costruiamo un foglio che, supponendo un'estrazione di tre palline, una alla volta e rimettendo la pallina nell'urna, determini la probabilità delle uscite dei tre colori indipendentemente dall'ordine di estrazione.
Proviamo il foglio con b=7, n=5, r=3.
Simuliamo poi un'estrazione di x terne di palline e calcoliamo la percentuale di estrazioni delle terne formate da due palline nere e una bianca.

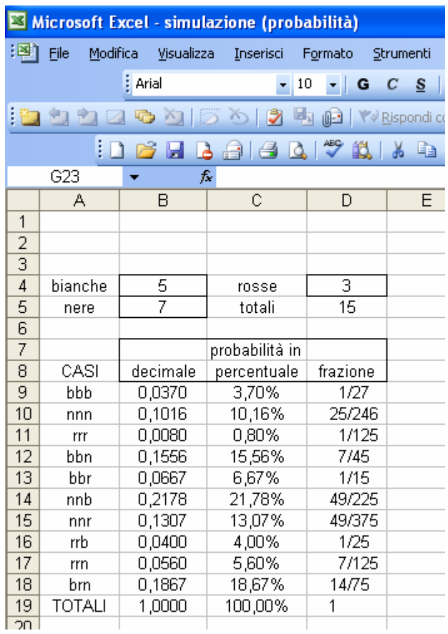
Analisi del problema: Osserviamo che le diverse terne delle palline di tre colori, indipendenti dall'ordine, sono BBB, NNN, RRR, BBN, BBR,BNN, BRR, NNR, RRN,BRN, in totale dieci casi.
Calcoliamo in relazione ai valori b, n, r le probabilità dei dieci casi.

- Detto t il numero totale delle palline, la probabilità di estrazione di una pallina bianca è $\frac{b}{t}$. Se rimettiamo la pallina nell'urna le tre estrazioni sono **eventi indipendenti**, quindi la probabilità dell'uscita di tre bianche è (**probabilità composta di eventi indipendenti**) $\frac{b}{t}\frac{b}{t}\frac{b}{t}=\frac{b^3}{t^3}$.
  Otteniamo le espressioni analoghe per i casi di tre nere e di tre rosse.
- La probabilità di estrarre due bianche e una nera è data dall'unione di tre eventi: BBN o BNB o NBB e quindi un probabilità totale: $\frac{b}{t}\frac{b}{t}\frac{n}{t}+\frac{b}{t}\frac{n}{t}\frac{b}{t}+\frac{n}{t}\frac{b}{t}\frac{b}{t}=3\cdot\frac{b^2 n}{t^3}$. Espressioni analoghe si hanno per l'uscita di doppia di una pallina abbinata a una terza di colore diverso.
- La probabilità di estrarre tre palline diverse sarà data dal prodotto delle singole probabilità moltiplicato per il numero di permutazioni ($P_3=3!=6$); quindi $6\cdot\frac{b}{t}\frac{n}{t}\frac{r}{t}=6\cdot\frac{bnr}{t^3}$

Costruzione del foglio: riportiamo quanto analizzato nel foglio, calcolando i valori in forma decimale (quattro cifre decimali), percentuale e frazionaria:



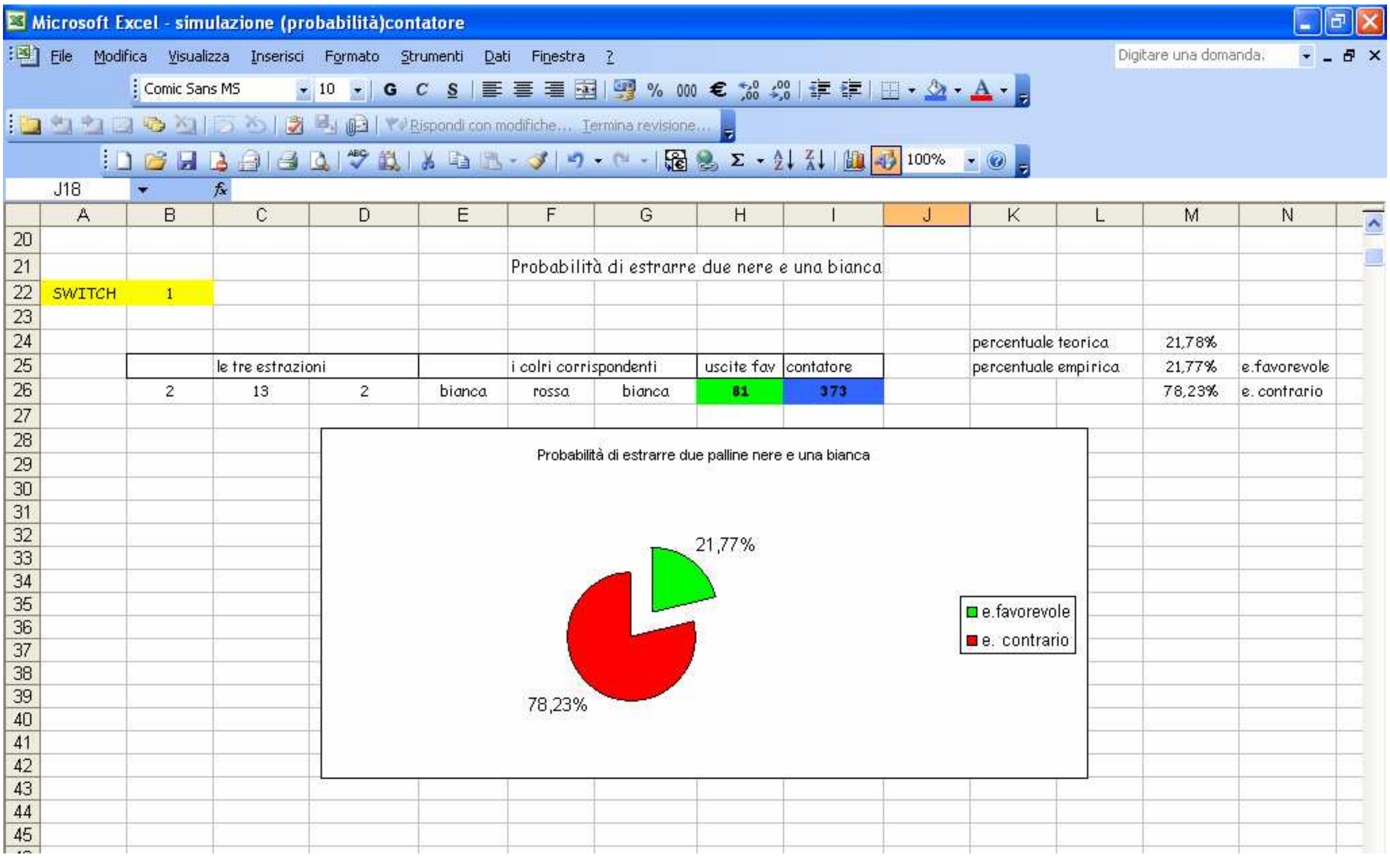
	A	B	C	D
1				
2				
3				
4	bianche	5	rosse	3
5	nere	7	totali	=SOMMA(B4;B5;D4)
6				
7			probabilità in	
8	CASI	decimale	percentuale	frazione
9	bbb	=B4^3/D5^3	=B9	=B9
10	nnn	=B5^3/D5^3	=B10	=B10
11	rrr	=D4^3/D5^3	=B11	=B11
12	bbn	=3*B4^2*B5/D5^3	=B12	=B12
13	bbr	=3*B4^2*D4/D5^3	=B13	=B13
14	nnb	=3*B5^2*B4/D5^3	=B14	=B14
15	nnr	=3*B5^2*D4/D5^3	=B15	=B15
16	rrb	=3*D4^2*B4/D5^3	=B16	=B16
17	rrn	=3*D4^2*B5/D5^3	=B17	=B17
18	brn	=6*B4*B5*D4/D5^3	=B18	=B18
19	TOTALI	=SOMMA(B9:B18)	=SOMMA(C9:C18)	=SOMMA(D9:D18)
20				



	A	B	C	D
1				
2				
3				
4	bianche	5	rosse	3
5	nere	7	totali	15
6				
7			probabilità in	
8	CASI	decimale	percentuale	frazione
9	bbb	0,0370	3,70%	1/27
10	nnn	0,1016	10,16%	25/246
11	rrr	0,0080	0,80%	1/125
12	bbn	0,1556	15,56%	7/45
13	bbr	0,0667	6,67%	1/15
14	nnb	0,2178	21,78%	49/225
15	nnr	0,1307	13,07%	49/375
16	rrb	0,0400	4,00%	1/25
17	rrn	0,0560	5,60%	7/125
18	brn	0,1867	18,67%	14/75
19	TOTALI	1,0000	100,00%	1

Simulazione delle estrazioni

- Per simulare l'estrazione di una pallina, determiniamo un numero casuale compreso tra 1 e t (il valore di t è nella cella D5) digitando in A26 la formula =INT(CASUALE()*$D$5)+1.
- Abbiniamo poi il numero al colore della pallina, digitando nella cella D26 la formula =SE(A26<=$B$4;"bianca";SE(A26<=$B$4+$B$5;"nera";"rossa")).
- Per ottenere la terna di estrazioni, copiamo la A26 fino alla C26 e la D26 fino alla F26.
- Scriviamo in G26 la formula =SE(E(CONTA.SE(D26:F26;"nera")=2;CONTA.SE(D26:F26;"bianca")=1);1;0), in modo da appuntare l'eventuale uscita di due nere e una bianca.
- Per ripetere le estrazioni, utilizziamo due contatori, uno che tiene conto delle terne favorevoli =SE(B22=1;SE(E(CONTA.SE(E26:G26;"nera")=2;CONTA.SE(E26:G26;"bianca")=1);H26+1;H26);0)
  e uno che tiene conto delle estrazioni effettuate =SE(B22=1;SE(B26<>0;I26+1;0);0).
- Utilizzeremo una cella (SWITCH) che ci permetta di azzerare tutto (0) e ricominciare le prove (1).
- Mostriamo la frequenza dell'uscita di due nere e una bianca scrivendo nella cella M25 (=H26/I26) e dichiarandola in formato percentuale.
- Se battiamo il tasto F9 attiviamo tutti gli operatori CASUALE e simuliamo un'altra estrazione di una terna.



ATTIVITA' PROPOSTE PER IL PROBLEMA DELL'ESTRAZIONE

PROPOSTA A

In un'urna ci sono b palline bianche, n nere, r rosse, v verdi. Costruiamo un foglio che, supponendo un'estrazione di quattro palline, una alla volta e rimettendo la pallina nell'urna, determini la probabilità delle uscite dei quattro colori indipendentemente dall'ordine di estrazione.

1. Creare inizialmente un foglio con b=7, n=5, r=3, v=6.
2. Successivamente generalizzare il problema.

PROPOSTA B

In un'urna ci sono b palline bianche, n nere. Costruiamo un foglio che, supponendo un'estrazione in successione (senza reimbussolamento) di due palline, determina la probabilità che escano

1. due palline bianche;
2. due palline dello stesso colore;
3. due palline di colore diverso.

POLIGONI

Problema: **Dividendo un segmento in n parti, qual è la probabilità che si possa formare un poligono di n lati?**

Analisi del problema:

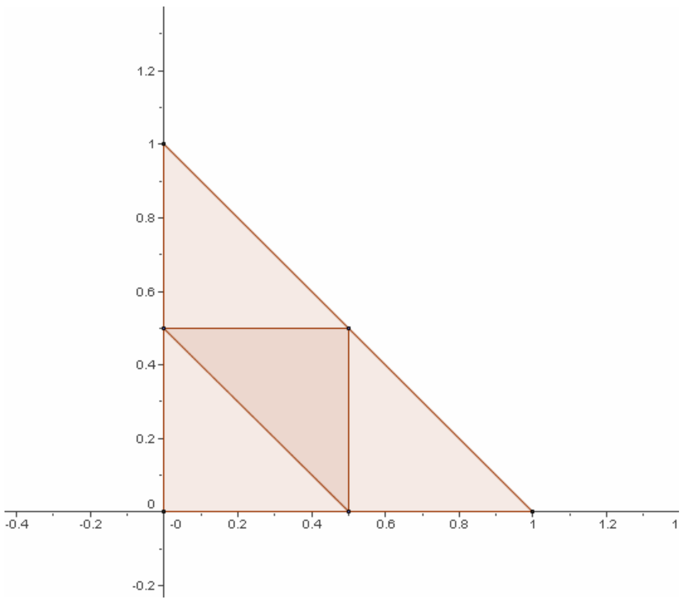
- Il problema può essere risolto utilizzando la definizione classica di probabilità: rapporto tra casi favorevoli e casi possibili: i casi possibili saranno dati dalle possibilità di dividere un segmento in n parti; i casi favorevoli quando i vari pezzi soddisfano le condizioni affinché il poligono possa essere costruito (ciascun lato minore della somma degli altri);
- Consideriamo un segmento di lunghezza unitaria;
- Per dividerlo in n parti generiamo n-1 numeri casuali compresi tra 0 e 1 e li ordiniamo, in modo che le lunghezze dei lati si ottengano per differenza;
- Se le misure dei lati soddisfano le condizioni affinché la figura sia costruibile i casi favorevoli verranno incrementati e un contatore terrà conto delle suddivisioni effettuate. Utilizzeremo una cella per azzerare tutto e ricominciare il conteggio.
- Analizzeremo i casi n=3 e n=4 perché rappresentabili anche geometricamente per poi cercare una possibile generalizzazione.

I caso n=3

Siano x, y e 1-x-y i tre pezzi di segmento che soddisfano le condizioni $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 1-x-y \geq 0 \end{cases}$ ossia $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x+y \leq 1 \end{cases}$,

affinché il triangolo sia costruibile dovranno essere verificate le condizioni $\begin{cases} x \leq y+1-x-y \\ y \leq x+1-x-y \\ 1-x-y \leq x+y \end{cases}$ ossia

$\begin{cases} x \leq \frac{1}{2} \\ y \leq \frac{1}{2} \\ x+y \geq \frac{1}{2} \end{cases}$.

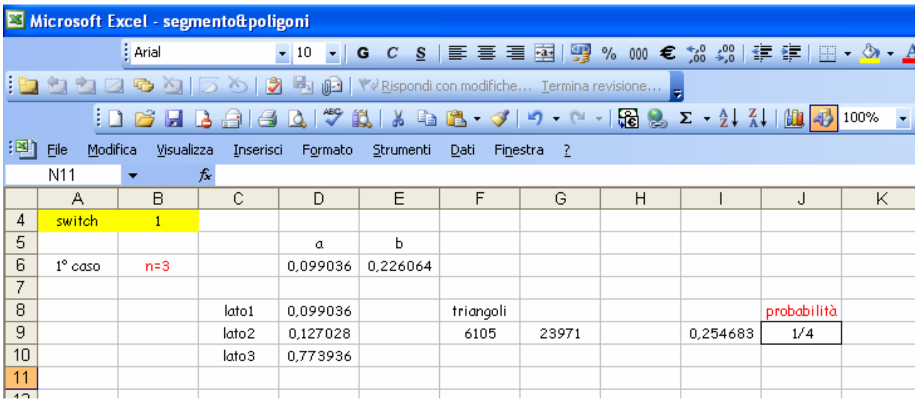


Ora se rappresentiamo le equazioni relative ai casi possibili e quelle relative ai casi favorevoli in un piano cartesiano ci rendiamo conto che la probabilità dell'evento E ("si forma un triangolo") è $p(E)=\frac{1}{4}$, in quanto l'area del triangolo più scuro (che rappresenta le situazioni favorevoli) è un quarto dell'area del triangolo di cateto unitario (che rappresenta le situazioni possibili).

Verifichiamo quanto trovato con una simulazione:

Costruzione del foglio:

- In B4 il tasto che fa da interruttore (0 per annullare tutto;1 per iniziare)
- In D6 e E6 generiamo i due numeri casuali a e b =SE(B4=1;CASUALE();0);
- In D8 la lunghezza del primo segmento =MIN(D6;E6);
- In D9 la lunghezza del secondo segmento =MAX(D6;E6)-D8;
- In D10 la lunghezza del terzo segmento =1-D8-D9;
- In F9 il contatore che incrementa se le condizioni affinché si formi un triangolo sono verificate: =SE(B4=1;SE(E(D8<D9+D10;D9<D8+D10;D10<D8+D9);F9+1;F9);0);
- In G9 il contatore delle prove effettuate: =SE(B4=1;SE(E(D8<>0;D9<>0);G9+1;G9);0);
- In I9 il rapporto =SE($B$4=1;$F$9/$G$9;" ") e in J9 lo stesso, ma in forma frazionaria.



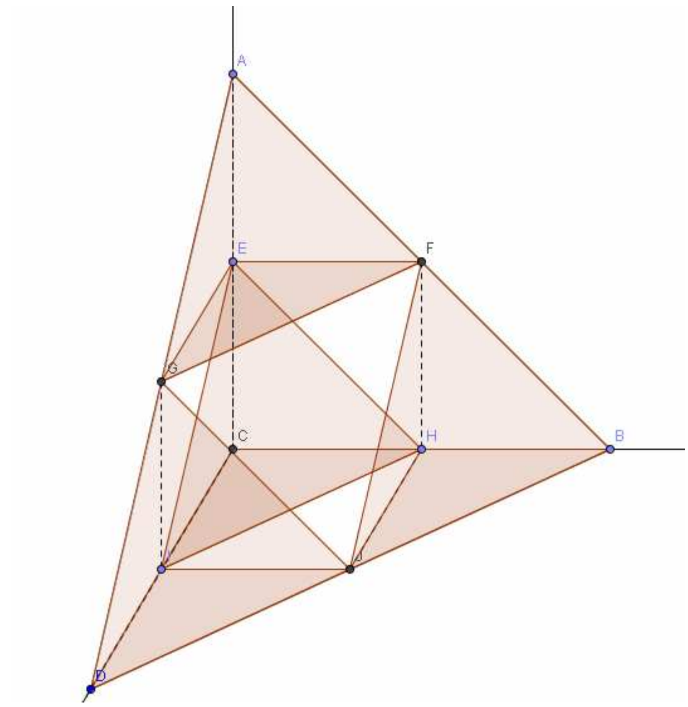
II caso n=4

Ora i pezzi sono 4: x, y,z e 1-x-y-z. Le condizioni cui devono soddisfare sono

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ z \geq 0 \\ x+y+z \leq 1 \end{cases} \quad (1)$$

Le condizioni per poter costruire un quadrilatero sono

$$\begin{cases} x \leq \frac{1}{2} \\ y \leq \frac{1}{2} \\ z \leq \frac{1}{2} \\ x+y+z \geq \frac{1}{2} \end{cases} \quad (2)$$



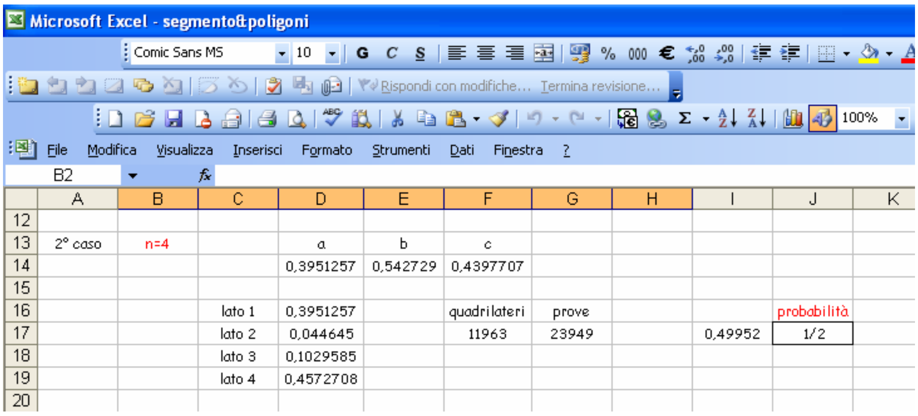
Le condizioni (1) nello spazio cartesiano rappresentano una piramide (ACDB) che ha per base un triangolo rettangolo di cateto unitario e altezza unitaria.

Le condizioni (2) impongono di togliere alla figura precedente quattro piramidi (quelle colorate: AEGF;ECIH; CIDJ; FHJB) che hanno per base un triangolo rettangolo di cateto $\frac{1}{2}$ e altezza $\frac{1}{2}$. Poiché la piramide con cateto unitario contiene otto piramidi di cateto $\frac{1}{2}$, ciò significa che la probabilità sarà di $\frac{4}{8}$, ossia $\frac{1}{2}$.

Verifichiamo con la simulazione:

Costruzione del foglio

- In D14,E14 e F14 generiamo tre numeri casuali a, b e c;
- In D16 la lunghezza del primo segmento =MIN(D14;E14;F14);
- In D17 la lunghezza del secondo segmento =MEDIANA(D14;E14;F14)-D16;
- In D18 la lunghezza del terzo segmento =MAX(D14;E14;F14)-D16-D17;
- In D19 la lunghezza del quarto segmento =1-D18-D17-D16;
- In F17 il contatore che incrementa se la condizione affinché sia un quadrilatero è verificata;
- In G17 il contatore delle prove effettuate;
- In I17 e J17 la relativa probabilità.

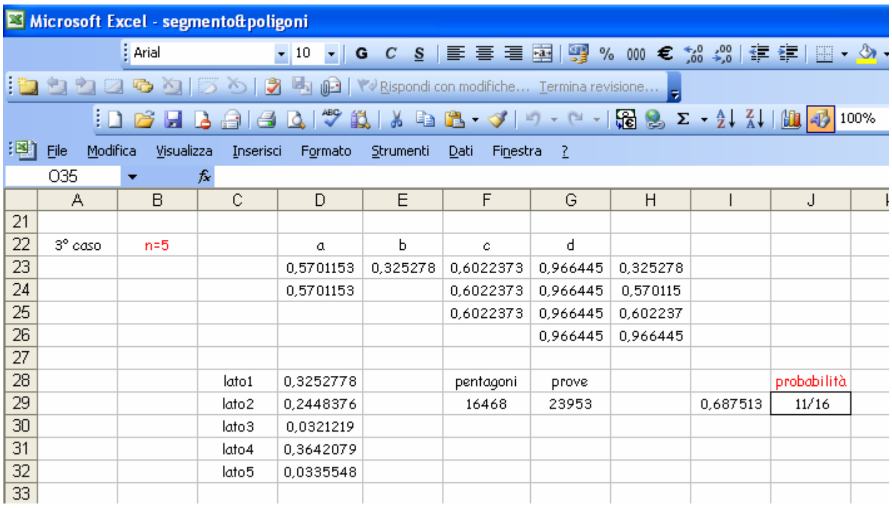


	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
12											
13	2° caso	n=4		a	b	c					
14				0,3951257	0,542729	0,4397707					
15											
16			lato 1	0,3951257		quadrilateri	prove			probabilità	
17			lato 2	0,044645		11963	23949		0,49952	1/2	
18			lato 3	0,1029585							
19			lato 4	0,4572708							
20											

III caso n=5

Costruzione del foglio

- In D23,E23, F23 e G23 generiamo quattro numeri casuali a, b, c e d ;
- Per ordinare i quattro valori, calcoliamo il minimo di essi in H22,poi in D24 riportiamo il valore soprastante se esso non è il minimo o la cella vuota se lo è utilizzando la formula =SE(D23=" ";" ";SE(D23-$H$23<>0;D23;" ")) che viene copiata in E23,F23,G23 mentre in H23 verrà calcolato il minimo;così si ripeterà nella riga 24,25 e 25;nella colonna H troveremo così i numeri casuali ordinati.
- Le misure dei segmenti sono calcolate sempre per differenza;
- Le condizioni per la realizzazione del poligono sono le solite.



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
21										
22	3° caso	n=5		a	b	c	d			
23				0,5701153	0,325278	0,6022373	0,966445	0,325278		
24				0,5701153		0,6022373	0,966445	0,570115		
25						0,6022373	0,966445	0,602237		
26							0,966445	0,966445		
27										
28			lato1	0,3252778		pentagoni	prove			probabilità
29			lato2	0,2448376		16468	23953		0,687513	11/16
30			lato3	0,0321219						
31			lato4	0,3642079						
32			lato5	0,0335548						
33										

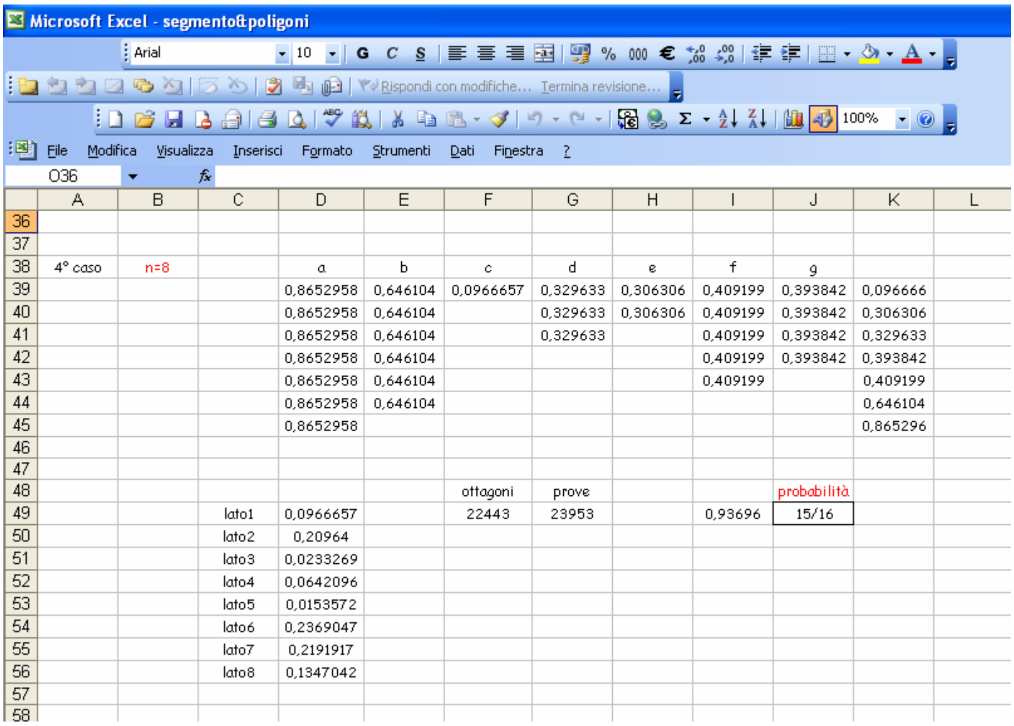
- La probabilità calcolata è $\frac{11}{16}$.

A questo punto possiamo costruire la seguente tabella:

n	dimensioni	Figure simili contenute con lato dimezzato	Vincoli perché si possa formare il poligono	Probabilità $p(E_n)$
3	2	$4=2^2$	3	$p(E_3)=\frac{4-3}{4}=\frac{1}{4}$
4	3	$8=2^3$	4	$p(E_4)=\frac{8-4}{8}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$
5	4	2^4	5	$p(E_5)=\frac{16-5}{16}=\frac{11}{16}$
Generalizzazione ipotizzata:				
n	n-1	2^{n-1}	n	$p(E_n)=\frac{2^{n-1}-n}{2^{n-1}}$

Per confermare quanto ipotizzato simuliamo il caso n=8 e costruiamo il foglio:

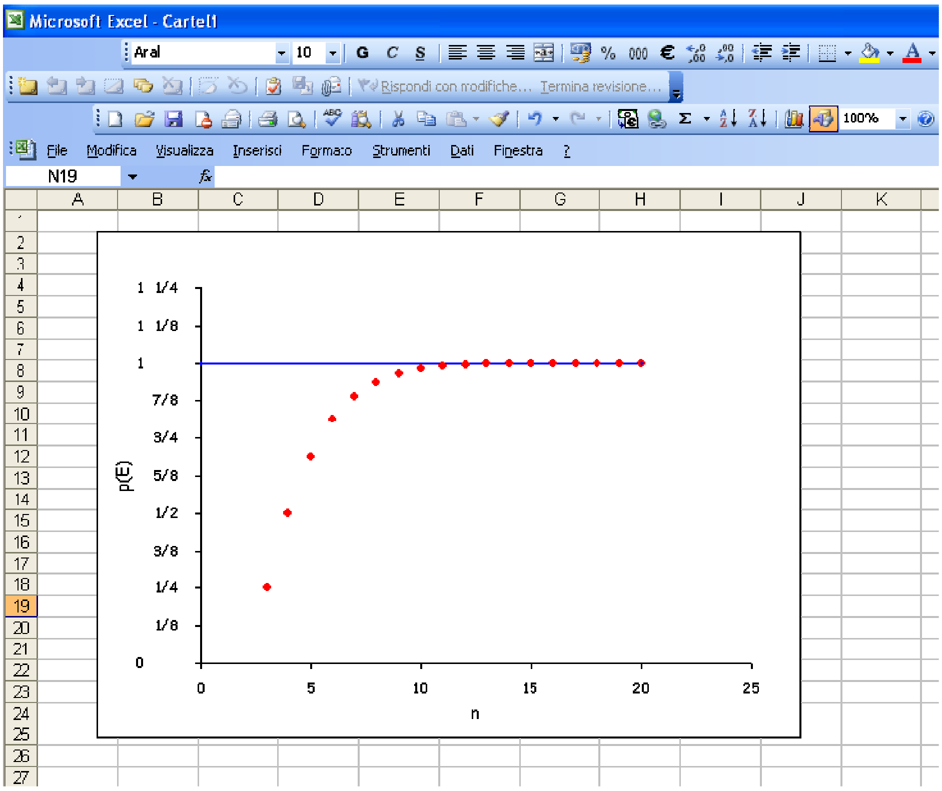
IV caso n=8



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
38	4° caso	n=8		a	b	c	d	e	f	g		
39				0,8652958	0,646104	0,0966657	0,329633	0,306306	0,409199	0,393842	0,096666	
40				0,8652958	0,646104		0,329633	0,306306	0,409199	0,393842	0,306306	
41				0,8652958	0,646104		0,329633		0,409199	0,393842	0,329633	
42				0,8652958	0,646104				0,409199	0,393842	0,393842	
43				0,8652958	0,646104				0,409199		0,409199	
44				0,8652958	0,646104						0,646104	
45				0,8652958							0,865296	
48						ottagoni	prove			probabilità		
49			lato1	0,0966657		22443	23953		0,93696	15/16		
50			lato2	0,20964								
51			lato3	0,0233269								
52			lato4	0,0642096								
53			lato5	0,0153572								
54			lato6	0,2369047								
55			lato7	0,2191917								
56			lato8	0,1347042								

Abbiamo quindi la conferma di quanto ipotizzato, infatti per n=8 $p(E_8) = \frac{2^7 - 8}{2^7} = \frac{120}{128} = \frac{15}{16}$.

Possiamo anche notare che $\lim_{n \to +\infty} p(E_n) = \lim_{n \to +\infty} \frac{2^{n-1} - n}{2^{n-1}} = 1$ ossia più alto è il numero di pezzi in cui viene diviso il segmento più è certa la costruzione del relativo poligono, come si vede dal grafico:



ATTIVITA' PROPOSTE PER IL PROBLEMA DEI POLIGONI

PROPOSTA A

Risolvere formalmente il problema della rottura in tre parti del segmento per calcolare la probabilità che si formi un triangolo OTTUSANGOLO.

PROPOSTA B

Risolvere formalmente il problema della rottura in tre parti del segmento per calcolare la probabilità che si formi un triangolo ACUTANGOLO.

LE PASSEGGIATE DI POPEYE

Problema: Una sera, dopo aver bevuto, Popeye si aggira sul lungomare finché arriva ad un lampione che sorge in un pontile a 7 metri dal mare sui tre lati del pontile e a 9 metri dalla riva. Popeye, partendo dal lampione, si dirige casualmente verso nord o sud o est o ovest facendo un passo di un metro. Ad ogni passo prende una direzione casuale in uno dei punti cardinali. Quale probabilità ha Popeye di raggiungere la riva senza cadere in acqua?

Analisi del problema: Data la difficoltà di risolvere il problema con metodi classici, ricorriamo ad una simulazione che consenta di calcolare empiricamente la frequenza dell'evento " Popeye non è caduto in mare" per un gran numero di prove. Il problema può essere scomposto in sottoproblemi:

- Simulazione del pontile con un sistema di assi cartesiani con il lampione sull'origine, un intervallo [-7;7] sull'asse x, un intervallo [-9;7] sull'asse y;
- Simulazione delle direzioni casuali di spostamento di Popeye;
- Il vagabondare di Popeye può portare a due situazioni: o cade in acqua (evento sfavorevole) o riesce a raggiungere la riva (evento favorevole); quindi utilizzando la definizione di probabilità classica otterremo quanto richiesto;
- Ogni qualvolta si ha l'evento favorevole o sfavorevole la prova è conclusa e quindi Popeye va riposizionato presso il lampione e quindi sarà necessario un reset e un contatore del numero di prove effettuate e un contatore del numero di eventi favorevoli.

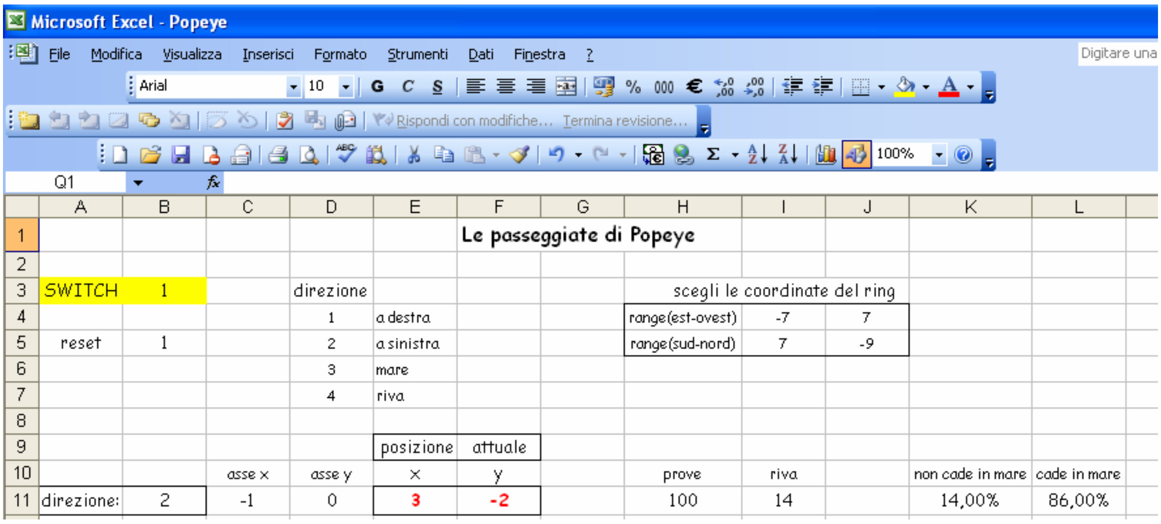
Costruzione del foglio:

- Interruttore generale (switch) in B3 (necessario per azzerare il tutto).
- Nelle celle I4 e J4 poniamo gli estremi dell'asse est-ovest e nelle celle I5 e J5 gli estremi dell'asse nord-sud (in questo modo potremo anche, in un secondo momento variare le dimensioni del pontile).
- Generiamo un numero casuale tra 1 e 4:
  in B11: =SE($B$3=1;INT(CASUALE()*4)+1;0);
  a ciascuno associamo una direzione secondo lo schema

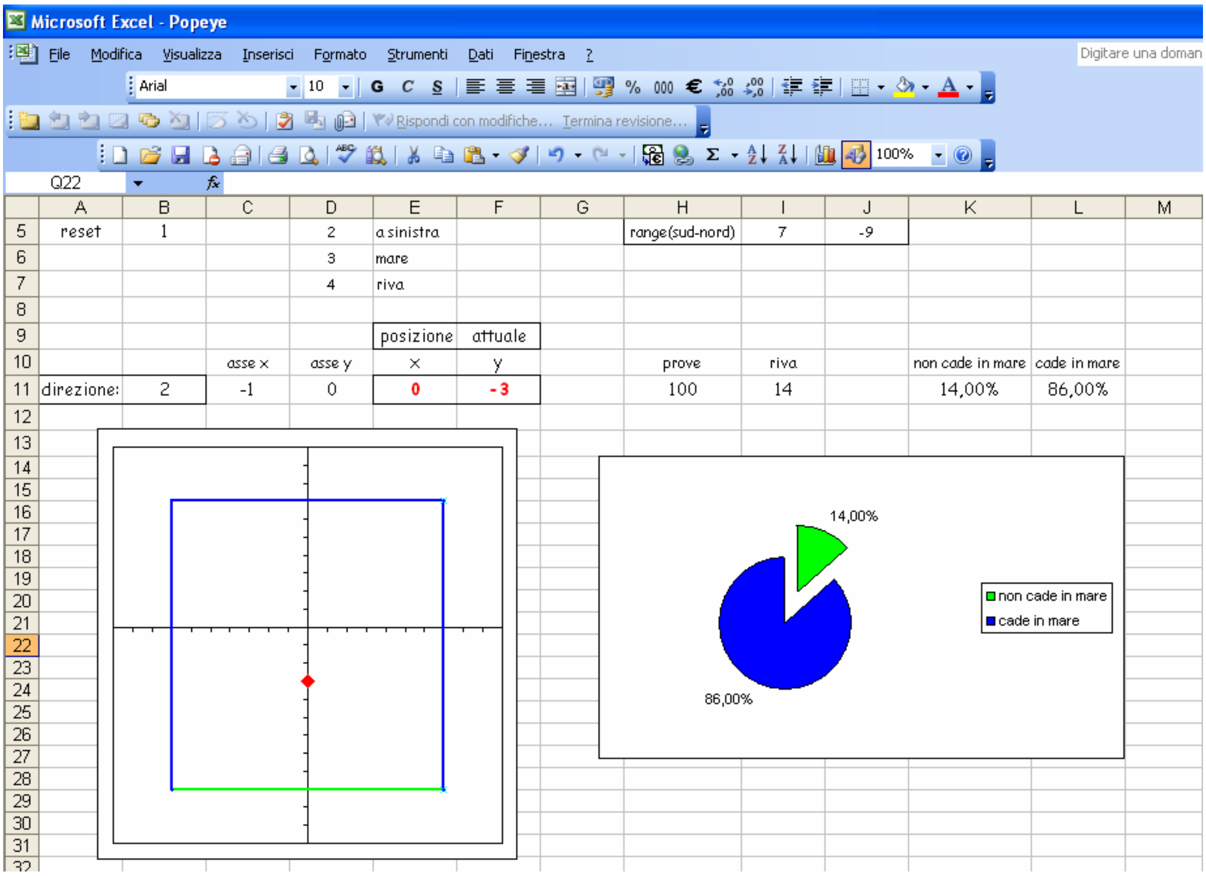
1	ovest
2	est
3	sud
4	nord

- In C11 individuiamo lo spostamento ovest (1), est (-1)
  =SE(B11=1;1;SE(B11=2;-1;0));
  in D11 individuiamo lo spostamento nord (1), sud (-1)
  =SE(B11=3;1;SE(B11=4;-1;0));
  in E11e F11 le coordinate
  x (=SE(E($B$3=1;$B$5=1);E11+C11;0), y (=SE(E($B$3=1;$B$5=1);F11+D11;0)
  che individuano la posizione effettive di Popeye.
- In G11 apparirà la scritta "acqua" se si superano gli estremi est, ovest o sud (eventi sfavorevoli); "riva" se si supera l'estremo nord (evento favorevole):
  =SE(O(E11<$I$4;E11>$J$4;F11>$I$5);"acqua";SE(F11<$J$5;"riva";" "))
- Per riposizionare Popeye presso il lampione quando una prova è conclusa poniamo in B5 un reset: =SE(O(G11="riva";G11="acqua";B3=0);0;1);
- Per determinare la probabilità poniamo in H11 un contatore delle prove effettuate:
  =SE(B3=1;SE(O(G11="riva";G11="acqua");H11+1;H11);0)
  e in I11 un contatore delle prove favorevoli: =SE(B3=1;SE(G11="riva";I11+1;I11);0).

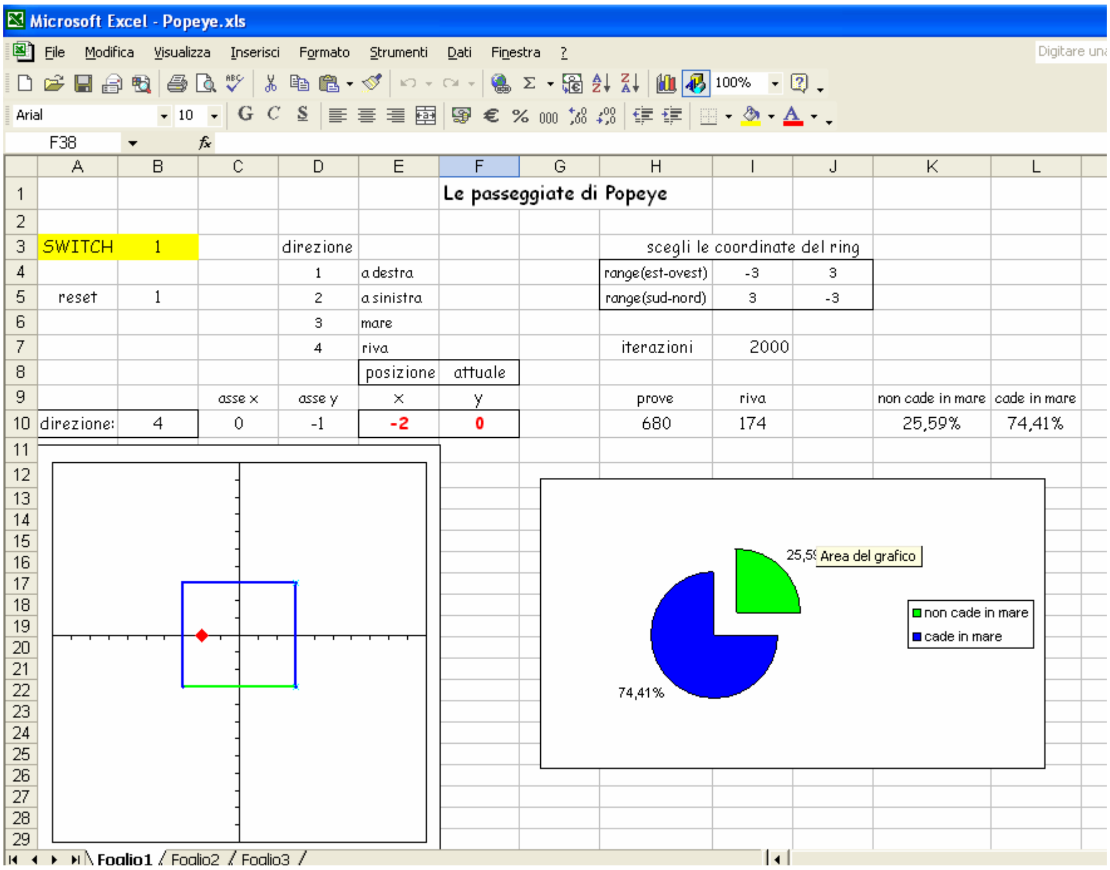
Quindi dal rapporto casi favorevoli e casi possibili si avrà la probabilità richiesta, inK11: =SE(H11=0;" ";I11/H11)



Il vagabondare di Popeye può essere rappresentato su di un grafico (dispersione) inserendo le coordinate della posizione attuale (E11, F11) mentre il pontile può essere rappresentato da segmenti di estremi (-7;7) e (-7;-9); (7,7) e (7;-9); (-7;7) e (7;7); (-7;-9) e (7;-9).



Se i limiti del pontile, come caso particolare, vengono scelti in modo che si formi un quadrato, si intuisce che la probabilità che Popeye ha di NON cadere in mare è di $\frac{1}{4}$. Il modello in Excel conferma questa previsione, come la figura seguente illustra:


Microsoft Excel - Popeye.xls
Le passeggiate di Popeye
SWITCH 1
reset 1
direzione
1 a destra
2 a sinistra
3 mare
4 riva
scegli le coordinate del ring
range(est-ovest) -3 3
range(sud-nord) 3 -3
iterazioni 2000
posizione attuale
asse x asse y x y
direzione: 4 0 -1 -2 0
prove riva non cade in mare cade in mare
680 174 25,59% 74,41%
25,5 Area del grafico
non cade in mare
cade in mare
74,41%
Foglio1 Foglio2 Foglio3

SOMMARIO